

MEM-205 Περιγραφική Στατιστική
Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

- Κώστας Σμαραγδάκης (kesmarag@gmail.com)

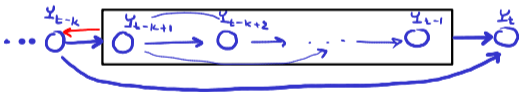
23-04-2020

Συνάρτηση Μερικής Αυτοσυσχέτισης (Partial Auto-Correlation Function)

- Ποσοτικοποιεί την άμεση γραμμική επίδραση του Y_{t-k} στο Y_t



- #1 $Y_{t-1} \rightarrow Y_t \quad (e_1)_t$
 - #2 $Y_{t-1} \rightarrow Y_{t-2} \quad (e_2)_{t-2}$
- $PACF(2) = \text{Cov}(e_1, e_2)$



#1 $Y_{t-k+1}, \dots, Y_{t-1} \rightarrow Y_t$

$$Y_t = A_1 + \sum_{j=1}^{k-1} B_1^{(j)} Y_{t-j} + (E_1)_t$$

#2 $Y_{t-k+1}, \dots, Y_{t-1} \rightarrow Y_{t-k}$

$$Y_{t-k} = A_2 + \sum_{j=1}^{k-1} B_2^{(j)} Y_{t-j} + (E_2)_{t-k}$$

Συνάρτηση Μερικής Αυτοσυσχέτισης (Partial Auto-Correlation Function)

model #1
$$\hat{y}_t = a_1 + \sum_{j=1}^{k-1} b_1^{(j)} y_{t-j}$$

$$\left\{ \underbrace{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}_{\text{εξωτερικά}}, \underbrace{(y_k)}_{\text{εξαρτημένη}}, (y_2, y_3, \dots, y_k, y_{k+1}), \dots \right\}$$

model #2
$$\hat{y}_{t-k} = a_2 + \sum_{j=1}^{k-1} b_2^{(j)} y_{t-j}$$

$$\left\{ \underbrace{(y_2, y_3, \dots, y_k, y_1)}_{\text{εξωτερικά}}, \underbrace{(y_{k+1})}_{\text{εξαρτημένη}}, (y_3, y_4, \dots, y_{k+1}, y_2), \dots \right\}$$

$$(e_1)_t = y_t - \hat{y}_t$$

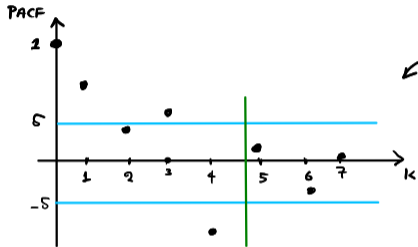
$$(e_1)_t = A_3 + B_3 (e_2)_{t-k} + (e_3)_t$$

$$(e_2)_{t-k} = y_{t-k} - \hat{y}_{t-k}$$

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx} SS_{yy}}}$$

$$PACF(k) = \frac{SS_{e_1 e_2}}{\sqrt{SS_{e_1 e_1} SS_{e_2 e_2}}}$$

Συνάρτηση Μερικής Αυτοσυσχέτισης (Partial Auto-Correlation Function)



Αυτοπαλινδρομικό Μοντέλο Τύπου 4

$$Y_t = A + \sum_{j=1}^4 B^{(j)} Y_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$\{Y_{t-k} : |PACF(k)| > \delta, k=1, \dots, K\} \rightarrow Y_t$$

Κάνουμε την υπόθεση ότι το $\text{PACF}(k)$ ακολουθεί για αρκετά μεγάλο N την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\text{PACF}_\infty(k), 1/N)$, όπου $\text{PACF}_\infty(k)$ η πραγματική τιμή του συντελεστή μερικής αυτοσυσχέτισης. ϵ^2

Διάστημα εμπιστοσύνης για τους συντελεστές μερικής αυτοσυσχέτισης

Το $(1 - \alpha) * 100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το $\text{PACF}_\infty(k)$ είναι:

$$\left[\text{PACF}(k) - z \frac{1}{\sqrt{N}}, \text{PACF}(k) + z \frac{1}{\sqrt{N}} \right]$$

όπου z το z -score για το οποίο $P(Z < z) = 1 - \alpha/2$.

Δηλαδή,

$$P\left(\text{PACF}_\infty(k) \in \left[\text{PACF}(k) - z \frac{1}{\sqrt{N}}, \text{PACF}(k) + z \frac{1}{\sqrt{N}} \right]\right) = 1 - \alpha$$

Γραμμικά Μοντέλα για Πρόβλεψη Μελλοντικών Τιμών

$$P_{ACF}(k) = 0$$

95% διαστήμα εμπιστοσύνης

$$z = 1.96$$

$$\left[-1.96 \frac{1}{\sqrt{N}}, 1.96 \frac{1}{\sqrt{N}} \right]$$

$$\delta = 1.96 \frac{1}{\sqrt{N}}$$