MEM-205 Περιγραφική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (kesmarag@gmail.com)

13-04-2020

- Θέλουμε να προβλέψουμε μελοντικές τιμές μιας χρονολογικής σειράς

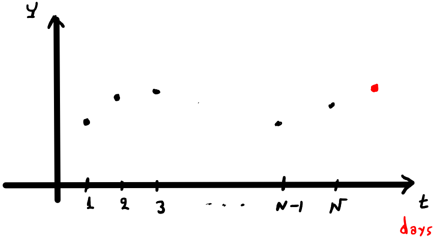
$$\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\} \to Y_{N+1}$$

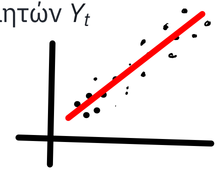
$$t_1 = 1 \quad t_2 = 2, \ldots, t_N = N$$

- Θα μελετήσουμε τη γραμμική συσχέτιση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών Y_t

$Y_1 \quad Y_2 \to Y_3$

$Y_1, \ldots, Y_t \to Y_{t+1}$





- Αρχικά θεωρούμε το πιθανοθεωρητικό μοντέλο

$\{(1,y_1),(2,y_2),\dots,(N,y_N)\}$

$\downarrow N-1$

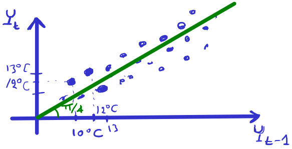
$\{(y_1,y_2),(y_2,y_3),\dots,(y_{N-1},y_N)\}$

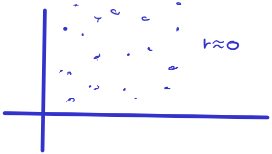
$$Y_t = A + BY_{t-1} + \epsilon_t$$

$t=2,\dots,N$

a, b

$\hat{y}_t = a + b y_{t-1}$





Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης (Pearson)

$$ACF(1) = \quad r = \frac{SS_{Y_t, Y_{t-1}}}{\sqrt{SS_{Y_t,Y_t} SS_{Y_{t-1},Y_{t-1}}}}$$

Y_{t-2} Y_{t-1} Y_t

a, b $\qquad \hat{y}_t = a + b y_{t-k} \qquad e_t = y_t - \hat{y}_t$

- Ανάλογα για k μη αρνητικό ακέραιο θεωρούμε το μοντέλο

$$Y_t = A + BY_{t-k} + \epsilon_t, \quad k \geq 0$$

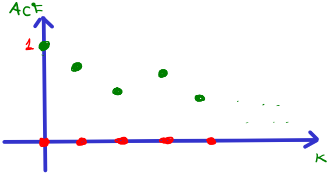
Συνάρτηση Αυτόσυσχέτισης (Auto-Correlation Function)

$$\mathrm{ACF}(k) = \frac{SS_{Y_t, Y_{t-k}}}{\sqrt{SS_{Y_t, Y_t} SS_{Y_{t-k}, Y_{t-k}}}}, \quad k \geq 0$$

$$SS_{xy} = \sum_{n=1}^{N} (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})$$

$$SS_{xx} = \sum_{n=1}^{N} (x_n - \bar{x})^2$$

για δοσμένο $k \geq 0$ $\rightarrow$ συντελεστές αυτοσυσχέτισης.



13°C	14°C	8°C	9°C	11°C	?
Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6

$Y_t = A + B^{(1)} Y_{t-1} + B^{(2)} Y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t = 3,4,5$

$a \quad b^{(1)} \quad b^{(2)}$

$y_t = a + b^{(1)} y_{t-1} + b^{(2)} y_{t-2}$

$\hat{y}_6 = a + b^{(1)} \cdot 11 + b^{(2)} \cdot 9$

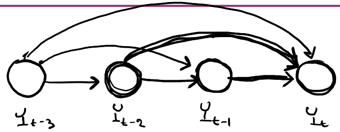
Αυτοπαλινδρομικό μοντέλο k τάξης (Auto-Regressive model of order k)

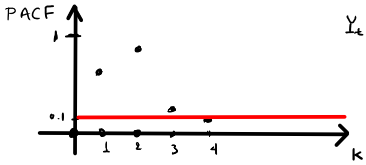
$$\mathrm{AR}(k) \quad : \quad Y_t = A + \sum_{j=1}^{k} B^{(j)} Y_{t-j} + \epsilon_t, \quad k \geq 0$$

$\{ (\underbrace{y_1, y_2, \ldots, y_k}_{\text{ανεξαρτητες}}, \overset{\text{εξαρτημενη}}{y_{k+1}}), (y_2, y_3, \ldots, y_{k+1}, y_{k+2}), \ldots, (y_{N-k}, y_{N-k+1}, \ldots, y_{N-1}, y_N) \}$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ 1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & y_{N-k} & y_{N-k+1} & \cdots & y_{N-1} \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} a \\ b^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(k)} \end{bmatrix} \qquad p = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$y = \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$



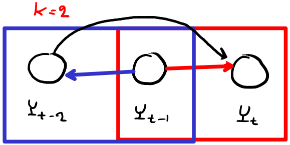


$$Y_t = A + B^{(1)} Y_{t-1} + B^{(2)} Y_{t-2} + B^{(3)} Y_{t-3} + \varepsilon_t$$

Συνάρτηση Μερικής Αυτόσυσχέτισης (Partial Auto-Correlation Function)

- Ποσοτικοποιεί την άμεση γραμμική επίδραση του Y_{t-k} στο Y_t

$$\text{PACF}(k) = \ldots$$



$$\text{PACF}(1) = \text{ACF}(1)$$

$Y_t = A_1 + B_1 Y_{t-1} + (\varepsilon_1)_t$ $\quad \hat{y}_t = a_1 + b_1 y_{t-1} \rightarrow (e_1)_t = y_t - \hat{y}_t$

$Y_{t-2} = A_2 + B_2 Y_{t-1} + (\varepsilon_2)_{t-2}$ $\quad \hat{y}_{t-2} = a_2 + b_2 y_{t-1} \rightarrow (e_2)_{t-2} = y_{t-2} - \hat{y}_{t-2}$

$(e_1)_t = A_3 + B_3 (e_2)_{t-2} + (\varepsilon_3)_t$ $\quad r = \dfrac{SS_{e_1 e_2}}{\sqrt{SS_{e_1 e_1} SS_{e_2 e_2}}} \equiv \text{PACF}(2)$