ΜΕΜ-205 Περιγραφική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (kesmarag@gmail.com)

09-04-2020

Προσαρμογή της Μακροχρόνιας Τάσης

$$Y_t = T_t + S_t + R_t, \quad t = 1, \ldots, N$$

- Θέλουμε να προσεγγίσουμε το $Y_t - T_t$
- Θα μελετήσουμε τη περίπτωση μακροχρόνιας τάσης που περιγράφεται ικανοποιητικά από ένα πολυώνυμο p-βαθμού

Λήμμα

Έστω το p-βαθμού πολυώνυμο

$$f(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_p t^p.$$

Τότε

$$\Delta f(t) = f(t) - f(t-1)$$

θα είναι πολυώνυμο με βαθμό το πολύ $p-1$

Διωνυμικό Ανάπτυγμα $(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$ όπου $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$

$\Delta f(t) = f(t) - f(t-1) = \cancel{c_0} + c_1 t + \dots + \underline{c_p t^p} - \cancel{c_0} - c_1(t-1) - \dots - \underline{c_p (t-1)^p} =$

$= c_p \{t^p - (t-1)^p\} + m_1(t)$, όπου m_1 πολυώνυμο βαθμού το πολύ $p-1$

$\binom{p}{p} = \frac{p!}{p!(p-p)!} = 1$

$a = t$, $b = -1$

$(t-1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} t^k (-1)^{p-k} = \binom{p}{p} t^p (-1)^0 + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} t^k (-1)^{p-k} =$

$= t^p + m_2(t)$, όπου m_2 πολυώνυμο βαθμού το πολύ $p-1$

$\Delta f(t) = c_p(-m_2(t)) + m_1(t) = m_1(t) - c_p m_2(t)$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ $p-1$.

$\Delta^2 f(t) = \Delta(\overset{p-1}{\Delta f(t)})$ ← Πολυώνυμο βαθμού το πολύ $p-2$

$\vdots$

$\Delta^q f(t) = \Delta(\Delta^{q-1} f(t))$, $1 \le q \le p$ ← πολυώνυμο βαθμού το πολύ $p-q$

$\Delta^p f(t)$ θα είναι σταθερά.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_N$

$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$, $t \ge 2$

$\Delta^2 Y_t = \Delta(\Delta Y_t) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} = Y_t - Y_{t-1} - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$, $t \ge 3$

$T_t = \sum_{k=0}^{p} c_k t^k$, $c_k \in \mathbb{R}$

Εαν εφαρμόσουμε το $\Delta^p T_t = T_t^* = c$

$\Delta^p Y_t \longrightarrow Y_t^*$

Προσαρμογή της Μακροχρόνιας Τάσης

$$Y \quad \{1, \overset{t=2}{2}, \overset{t=3}{4}, \overset{t=4}{8}\}$$

$$Y_t^* = \Delta Y_t \quad , t \geq 2$$

$$Y_2^* = Y_2 - Y_1 = 1$$

$$Y^* \{1, 2, 4\}$$

$$Y_3^* = Y_3 - Y_2 = 2$$

$$Y_4^* = Y_4 - Y_3 = 4$$

- Όταν η χρονολογική σειρά δεν παρουσιάζει εποχικές κυμάνσεις και έντονες μακροχρόνιες τάσεις, η εξομάλυνση χρησιμοποιείται για τη πρόβλεψη της τιμής Y_{N+1} γνωρίζοντας τις τιμές της χρονολογικής σειράς για τους χρόνους $t = 1, \ldots, N$

Έστω η χρονολογική σειρά

$$\{Y_1, \ldots, Y_N\}$$

και σταθερά $\alpha \in (0, 1)$
Ο παρακάτω γραμμικός μετασχηματισμός ονομάζεται εκθετική εξομάλυνση

$$Y_t^* = \alpha Y_t + (1 - \alpha) Y_{t-1}^*, \quad t = 2, \ldots, N$$

όπου $Y_1^* = Y_1$

$Y_2^* = \alpha Y_2 + (1-\alpha) Y_1^* = \alpha Y_2 + (1-\alpha) Y_1$

Παράδειγμα

$\{2,\ 5,\ 4.25,\ \ldots\ \}$

$$\overset{}{Y}\quad \{2,\ \overset{t=2}{6},\ \overset{t=3}{4},\ 6,\ 8,\ 6,\ 10,\ 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 8\},\quad \alpha = 0.75$$

$Y_1^* = Y_1 = 2$

$Y_2^* = \frac{3}{4}\cdot 6 + \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{10}{2} = 5$

$Y_3^* = \frac{3}{4}4 + \frac{1}{4}\cdot 5 = \frac{17}{4} = 4 + \frac{1}{4} = 4.25$

$\vdots$

$$Y_t^* = \alpha \sum_{j=0}^{t-2} (1-\alpha)^j Y_{t-j} + (1-\alpha)^{t-1} Y_1, \quad t = 2, \ldots, N$$

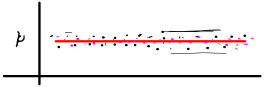
$t=2$ $\quad Y_2^* = \alpha \sum_{j=0}^{0} (1-\alpha)^j Y_{2-j} + (1-\alpha) Y_1 = \alpha Y_2 + (1-\alpha) Y_1 = \alpha Y_2 + (1-\alpha) Y_1^*$ ισχύει από ορισμό.

Έστω ότι ισχύει για t, θ.δ.ο ισχύει και για $t+1$.

$$Y_{t+1}^* = \alpha Y_{t+1} + (1-\alpha) Y_t^* = \alpha Y_{t+1} + (1-\alpha) \left\{ \alpha \sum_{j=0}^{t-2} (1-\alpha)^j Y_{t-j} + (1-\alpha)^{t-1} Y_1 \right\} =$$

$$= \alpha \sum_{j=0}^{(t+1)-2} (1-\alpha)^j Y_{(t+1)-j} + (1-\alpha)^{(t+1)-1} Y_1 .$$

- Θεωρούμε $Y_t, t = 1, \ldots, N$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητες.
- Υποθέτουμε επιπλέων ότι $\mathbb{E}(Y_t) = \mu$ και $\mathbb{V}(Y_t) = \sigma^2$ για κάθε $t = 1, \ldots, N$



$$Y_t^* = \alpha \sum_{j=0}^{t-2} (1-\alpha)^j Y_{t-j} + (1-\alpha)^{t-1} Y_1$$

$$\mathbb{E}\{Y_t^*\} = \alpha \sum_{j=0}^{t-2} (1-\alpha)^j \mathbb{E}\{Y_{t-j}\} + (1-\alpha)^{t-1} \mathbb{E}\{Y_1\} =$$

$$= \alpha\mu \sum_{t=0}^{t-2} (1-\alpha)^j + (1-\alpha)^{t-1}\mu = \mu\{1-(1-\alpha)^{t-1}\} + \lambda(1-\alpha)^{t-1} = \mu$$

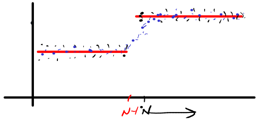
$$\mathrm{Var}\{Y_t^*\} = \alpha^2 \sum_{j=0}^{t-2} (1-\alpha)^{2j}\sigma^2 + (1-\alpha)^{2(t-1)}\sigma^2 =$$

$$= \sigma^2\alpha^2 \frac{1-(1-\alpha)^{2(t-1)}}{1-(1-\alpha)^2} + (1-\alpha)^{2(t-1)}\sigma^2$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Var}\{Y_t\} = \frac{\sigma^2\alpha}{2-\alpha} < \sigma^2$$

- Θεωρούμε $Y_t, t = 1, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητες.
- Υποθέτουμε επιπλέων ότι

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mu_1,\ t = 1, \ldots, N-1 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(Y_t) = \mu_2,\ t \geq N$$



Έστω $t \geq N$

$$\mathbb{E}\{Y_t^*\} = \alpha \sum_{j=0}^{t-2} (1-\alpha)^j\, \mathbb{E}(Y_{t-j}) + (1-\alpha)^{t-1}\, \mathbb{E}\{Y_1\} =$$

$$= \alpha \sum_{j=0}^{t-N} (1-\alpha)^j \mu_2 + \alpha \sum_{j=t-N+1}^{t-2} (1-\alpha)^j \mu_1 + (1-\alpha)^{t-1} \mu_1 =$$

$$= \mu_1 \left(1 - (1-\alpha)^{t-N+1}\right) + \mu_2\left((1-\alpha)^{t-N}\left(1 - (1-\alpha)^{N-1} + (1-\alpha)^{t-1}\right)\right)$$

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}\{Y_t^*\} = \mu_2$$

Εάν έχουμε τις τιμές τις χρονολογικής σειράς μέχρι και την χρονική στιγμή $t = N$ θεωρούμε ως προσέγγιση της μελλοντικής τιμής Y_{N+1} το Y_N^*

Forecast error $\quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ γνωστά $\quad \hat{Y}_{N+1} = Y_N^*$

$$Y_{N+1} - \hat{Y}_{N+1} = e_{N+1} \qquad Y_{N+1} = Y_N^* + e_{N+1}$$

$$Y_{N+1}^* = \alpha Y_{N+1} + (1-\alpha) Y_N^* = \alpha (Y_N^* + e_{N+1}) + (1-\alpha) Y_N^*$$

$$\boxed{Y_{N+1}^* = Y_N^* + \alpha e_{N+1}}$$