# MEM-205 Περιγραφική Στατιστική

**Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης**

Κώστας Σμαραγδάκης (kesmarag@gmail.com)

02-04-2020

### Το προσθετικό μοντέλο για χρονολογικές σειρές

$$Y_t = T_t + Z_t + S_t + R_t, \quad t = 1, \ldots, N$$

- $T_t$ : Η Μακροχρόνια τάση για την $t$-χρονική περίοδο.
- $S_t$ : Ο δείκτης εποχικότητας για την $t$-χρονική περίοδο.
- $C_t$ : Η κυκλική κύμανση για την $t$-χρονική περίοδο.
- $R_t$ : Η τυχαία κύμανση για την $t$-χρονική περίοδο.

## Απλουστευμένο μοντέλο

$$Y_t = T_t + R_t, \quad t = 1, \ldots, N$$

$$\mathbb{E}\{R_t\} = 0, \quad \mathbb{E}\{Y_t\} = T_t \equiv f(t)$$

- $f(t) = f(t; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$
- Έυρεση εκτιμήσεων $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_p$ των παραμέτρων της $f$.

$$y_t = f(t; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p) + r(t)$$

$$\hat{y}_t = f(t; \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_p)$$

## Logistic function

Dataset $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ with $t_1=1,\ t_2=2,\ \ldots,\ t_N=N$   $N$ χρονικές στιγμές

$$f(t) = f(t;\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \frac{\beta_3}{1+\beta_2\exp(-\beta_1 t)}, \quad \beta_1,\beta_2>0,\ \beta_3\in\mathbb{R}-\{0\}$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \beta_3$$

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1+\beta_2\exp\{-\beta_1 t\}}{\beta_3} = \frac{1+\beta_2\exp\{-\beta_1\}\exp\{-\beta_1(t-1)\}}{\beta_3} = \frac{1-\exp\{-\beta_1\}+\exp\{-\beta_1\}+\beta_2\exp\{-\beta_1\}\exp\{-\beta_1(t-1)\}}{\beta_3} =$$

$$= \frac{1-\exp\{-\beta_1\}}{\beta_3} + \exp\{-\beta_1\}\frac{1+\beta_2\exp\{-\beta_1(t-1)\}}{\beta_3} = \underbrace{\frac{1-\exp\{-\beta_1\}}{\beta_3}}_{\sim a} + \underbrace{\exp\{-\beta_1\}}_{\sim b}\frac{1}{f(t-1)}$$

σταθερές

$$b = \exp\{-\hat\beta_1\} \Leftrightarrow \boxed{\hat\beta_1 = -\ln b}$$

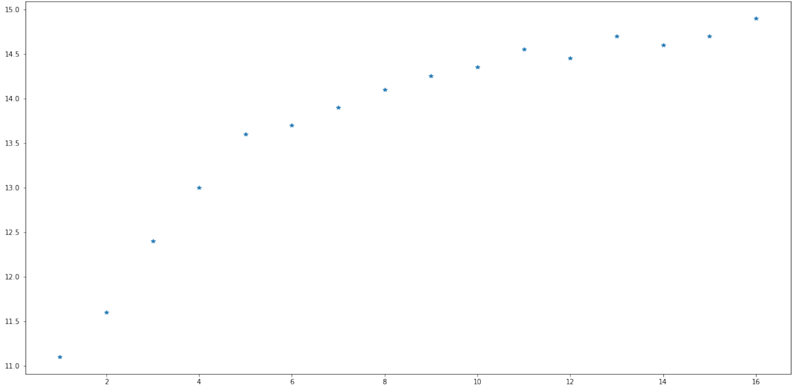
$$\boxed{\hat\beta_3 = \frac{1-\exp\{-\hat\beta_1\}}{a}}$$

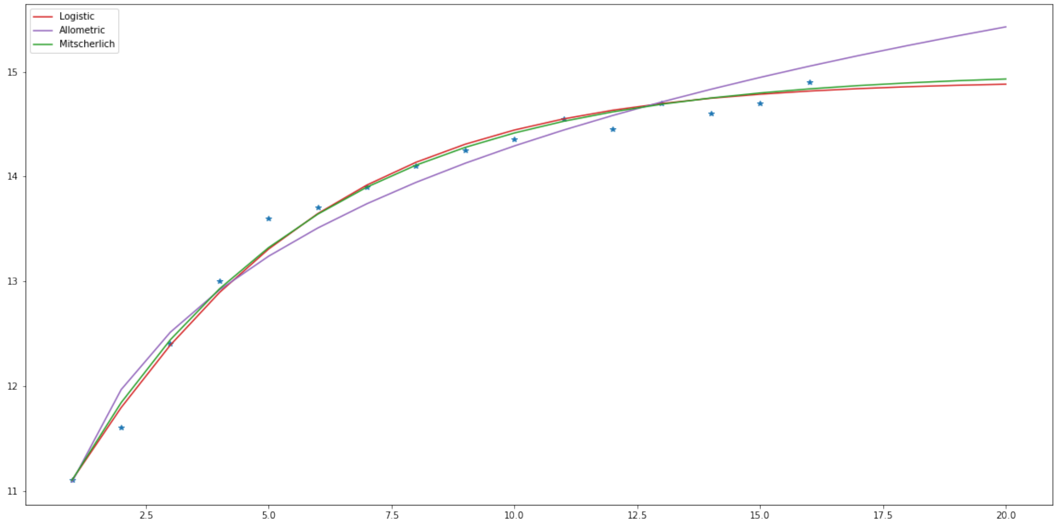
$\left\{\left(\frac{1}{y_1},\frac{1}{y_2}\right),\left(\frac{1}{y_2},\frac{1}{y_3}\right),\ldots,\left(\frac{1}{y_{N-1}},\frac{1}{y_N}\right)\right\}$   $N-1$ χρονικές στιγμές

$$y_1 = f(t_1) = f(1) = \frac{\hat\beta_3}{1+\hat\beta_2\exp\{-\hat\beta_1\}} \Leftrightarrow 1+\hat\beta_2\exp\{-\hat\beta_1\} = \frac{\hat\beta_3}{y_1} \Leftrightarrow \boxed{\hat\beta_2 = \left(\frac{\hat\beta_3}{y_1}-1\right)\exp\{\hat\beta_1\}}$$

## Παράδειγμα

$$\{11.1, 11.6, 12.4, 13.0, 13.6, 13.7, 13.9, 14.1, 14.25, 14.35, 14.55, 14.45, 14.7, 14.6, 14.7, 14.9\}$$




Logistic
Allometric
Mitscherlich
15
14
13
12
11
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0

## Εφαρμογή γραμμικού φίλτρου στη χρονολογική σειρά

γραμμικό φίλτρο

$$\mathbf{a} = \overset{2s+1}{[a_{-s}, \ldots, a_s]^T}, \quad \overset{\sum_{u=-s}^{s} a_u = 1}{[redacted]1}, \; a_u \geq 0 \;, \; u = -s, \ldots, s$$

$$Y_t^* = \sum_{u=-s}^{s} a_u Y_{t-u} \quad , \quad t = s+1, \ldots, N-s$$

$s = 3$ $\qquad$ $\overset{2\cdot 3+1=7}{a = [a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3]}$

Past $\qquad$ P $\qquad$ future

| $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $Y_4$ | $Y_5$ | $Y_6$ | $Y_7$ | $Y_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ | $a_{-1}$ | $a_{-2}$ | $a_{-3}$ | |

$$Y_4^* = a_{-3} Y_{4-3} + a_{-2} Y_{4-2} + a_{-1} Y_3 + a_0 Y_4 + \cdots + a_3 Y_7$$

- Απλός κινητός μέσος τάξης $2s+1$

$$a_u = \frac{1}{2s+1}, \quad u = -s, \ldots, s$$

- Απλός κινητός μέσος τάξης $2s$

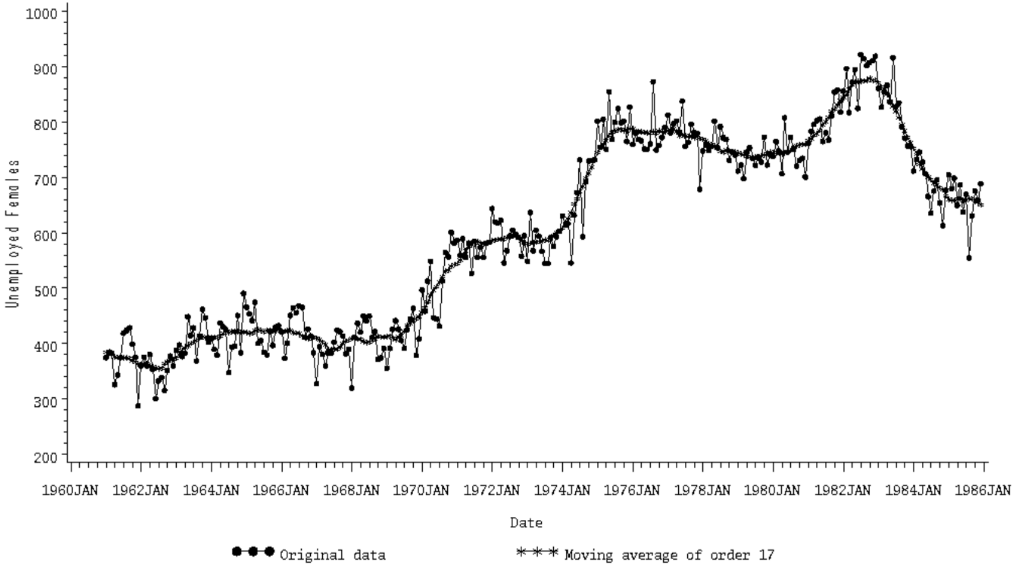
$$a_u = \frac{1}{2s}, \quad u = -s+1, \ldots, s-1, \quad a_{-s} = a_s = \frac{1}{4s}$$

### Παράδειγμα

Ποιά είναι τα διανύσματα συντελεστών για τα γραμμικά φίλτρα που αντιστοιχούν στους κινητούς μέσους με τάξεις 4 και 5;

$2s = 4 \Leftrightarrow s = 2$ $\quad \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right]^T$ $\quad 2s+1 = 5 \Leftrightarrow s = 2$ $\quad \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]^T$

# Χρονολογικές Σειρές (Time Series)



## Παράδειγμα

Εφαρμόστε το φίλτρο για τον απλό κινητό μέσο 3ης τάξεως στην παρακάτω χρονολογική σειρά

$$a = \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right]^T$$

$$\begin{array}{cccccccc} & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & Y_6 & Y_7 \\ Y & \{1, & 3, & 5, & 4, & 6, & 5, & 7\} \end{array}$$

$Y_2^* = 3$ $\quad Y_3^* = 4$ $\quad Y_4^* = 5$ $\quad Y_5^* = 5$ $\quad Y_6^* = 6$

$$Y^* \quad \{3, 4, 5, 5, 6\}$$

# Απλός Κινητός Μέσος (Simple Moving Average)

$$a = \left[\frac{1}{2s'+1}, \frac{1}{2s'+1}, \dots, \frac{1}{2s'+1}\right]^T$$

Πλήθος $2s'+1$

$$Y_t^* = \sum_{u=-s'}^{s'} a_u Y_{t-u} \qquad Y_{t+1}^* = \sum_{u=-s}^{s'} a_u Y_{t+1-u}$$

$$Y_{t+1}^* - Y_t^* = \sum_{u=-s'}^{s'} a_u (Y_{t+1-u} - Y_{t-u}) = a_u \sum_{u=-s'}^{s'} (Y_{t+1-u} - Y_{t-u}) = a_u (Y_{t+s+1} - Y_{t-s}) = \frac{1}{2s'+1} \cdot (Y_{t+s+1} - Y_{t-s})$$

$$\boxed{Y_{t+1}^* = Y_t^* + \frac{1}{2s'+1}(Y_{t+s'+1} - Y_{t-s}) \qquad \text{low-pass filter}}$$

Έστω ότι η $S_t$ είναι p-periodic συνάρτηση, δηλαδή

$$S_t = S_{t+p}, \quad t = 1, \dots, N - p$$

Εάν εφαρμόσουμε το φίλτρο για τον απλό κινητό μέσο $p$ τάξεως, θα έχουμε:

$$S_t^* = S, \quad t = 1 + s, 1 + s + 1, \dots, N - s$$

## Παράδειγμα

$t_3$

$t_2$ $\quad t_{2+5}$

$S_t \quad \{\cancel{0}, \cancel{2}, 4, 3, 1, 0, 2, 4, 3, 1, 0, 2, 4, 3, 1\} \quad p=5$

$2s+1=5 \Leftrightarrow s=2 \quad [1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5]^T$

$S_t^*$ $\quad S_3^* = \frac{10}{5} = 2$ $\quad S_5^* = 2$

$S_4^* = 2$

## Παράδειγμα

$t_3$

$S_t \quad \{0,\ 3,\ 4,\ 1,\ 0,\ 3,\ 4,\ 1,\ 0,\ 3,\ 4,\ 1\} \quad p = 4$

$2s = 4 \Leftrightarrow s = 2$

$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right]^T$

$S_3^* = \cancel{0 \cdot \frac{1}{8}} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + \cancel{0 \cdot \frac{1}{8}} = 2$

$S_4^* = 3\frac{1}{8} + 4\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 2$

$S_5^* = 2$

$\vdots$

$S_{11}^* = 2.$