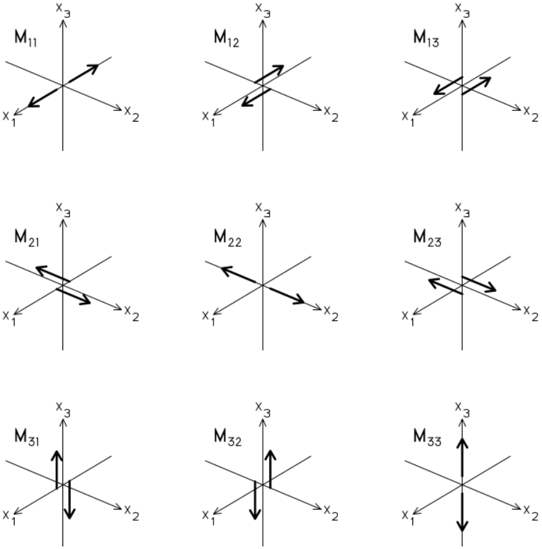
MEM-284: Κυματική Διάδοση

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

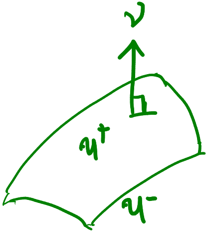
Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

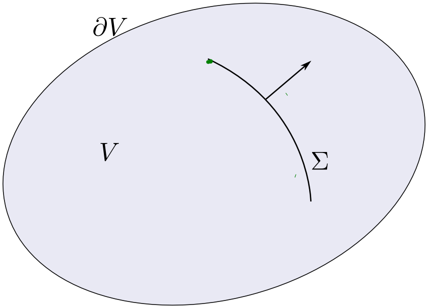
8η Διάλεξη - 18.3.2022

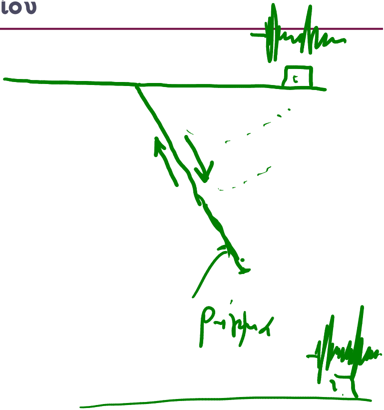
$\underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{0}$



Ασυνέχειες και ισοδύναμη δύναμη πεδίου



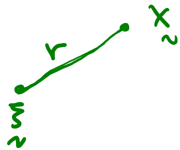




- Ασυνέχεια της μετατόπισης (εξάθρωση - dislocation) στην επιφάνεια Σ
- Την ασυνέχεια την συμβολίζουμε ως

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$$

$f_i = \delta_{ip}\,\delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\xi})\,\delta(t)$



Δύναμη πεδίου: $f_i = \delta_{ip}\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(t - \tau)$
Συνάρτηση Green: $\mathcal{G}_{ip}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$

- Η αρχή του χρόνου τ θα προσαρμόσει τους οδεύοντες παλμούς.

P-wave : $\delta(t - r/\alpha - \tau)$
S-wave : $\delta(t - r/\beta - \tau)$
Απόσταση σημείων $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}$: $r = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|_2$

$$\gamma_i = \frac{x_i - \xi_i}{r}$$

διεύθυνση της δύναμης.

σημείο μέτρησης

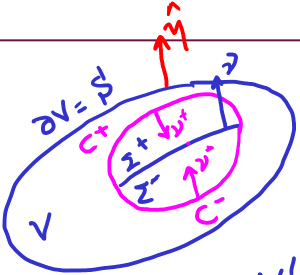
σημείο πηγής

χρόνος ενεργοποίησης

$$\mathcal{G}_{ip}(\underset{\sim}{x}, t; \underset{\sim}{\xi}, \tau)$$

i-συνιστώσα της μετατόπισης

χρόνος μέτρησης.



$$\int_V \nabla\cdot \underset{\sim}{u}\, dV = \int_S \underset{\sim}{u}\cdot \hat{n}\, dS$$ χωρίς το Σ

$$[\underset{\sim}{u}] = \underset{\sim}{u}^+ - \underset{\sim}{u}^- \neq \underset{\sim}{0}$$

$$V' = V - C$$

$$\int_{V'} \nabla\cdot \underset{\sim}{u}\, dV' = \int_{S'} \underset{\sim}{u}\cdot \hat{n}\, dS' + \int_{C^+} \underset{\sim}{u}\cdot \hat{\nu}^+\, dC^+ + \int_{C^-} \underset{\sim}{u}\cdot \hat{\nu}^-\, dC^-$$

$C^- \to \Sigma^-$

$C^+ \to \Sigma^+$

$V' \to V$

$\hat{\nu}^+ \to -\hat{\nu}$

$\hat{\nu}^- \to \hat{\nu}$

$\underset{\sim}{u}^+$

$\underset{\sim}{u}^-$

$$\int_V \nabla \cdot \underset{\sim}{u} \, dV = \int_{S'} \underset{\sim}{u} \cdot \hat{n} \, dS' \doteq \int_{\Sigma^+} \underset{\sim}{u}^+ \cdot \hat{\nu} \, d\Sigma^+ + \int_{\Sigma^-} \underset{\sim}{u}^- \cdot \hat{\nu} \, d\Sigma^-$$

$$\boxed{\int_V \nabla \cdot \underset{\sim}{u} \, dV = \int_{S'} \underset{\sim}{u} \cdot \hat{n} \, dS' - \int_{\Sigma} [\underset{\sim}{u}] \hat{\nu} \, d\Sigma}$$

Μέχρι τώρα έχουμε υποθέσει ισοτροπικά μέσα όπου

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

$u_{j,i} = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$

$$\epsilon_{ij} = (u_{j,i} + u_{i,j})/2$$

Γενική περίπτωση

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

$\underset{\approx}{\underset{\approx}{C}}$ $\quad C_{ijpq}$

$$\tau_{ij} = c_{ijpq} \epsilon_{pq}$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad \epsilon_{pq} = \epsilon_{qp}$$

- Πόσες διαφορετικά στοιχεία μπορεί να λάβει ο τετραδιάστατος τανυστής με τους συντελεστές c_{ijpq}?

$6 \times 6 = 36$ διαφορετικά στοιχεία.

$$c_{ijpq} = c_{jipq}, \quad c_{ijpq} = c_{ijqp}$$

- Τα διαφορετικά στοιχεία περιορίζονται στα 6*6=36.

Νόμος του Hook

$$\tau_{ij} = \sum_{p,q} c_{ijpq} u_{p,q}$$

Ισοτοπικά μέσα

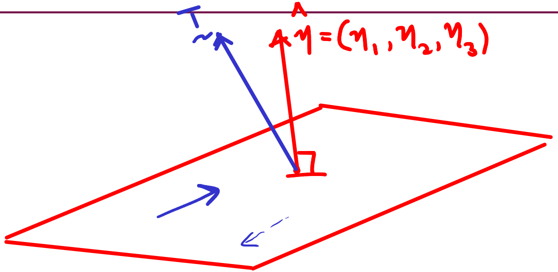
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$c_{ijpq} = \lambda\delta_{ij}\delta_{pq} + \mu(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp})$$

$$c_{1111} = \lambda\delta_{11}\delta_{11} + \mu(\delta_{11}\delta_{11} + \delta_{11}\delta_{11}) = \lambda + 2\mu$$

$$c_{1211} = \lambda\delta_{12}\delta_{11} + \mu(\delta_{11}\delta_{21} + \delta_{11}\delta_{21}) = 0$$

$C_{ijpq} \rightarrow \tau_{ij}$



- Κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$
- Τανυστής τάσεων τ_{ij}

$$T_i = \tau_{ij} n_j$$

$$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\underset{\approx}{\tau} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

$\underset{\approx}{\tau}\hat{n} \leftarrow$ Πίεση.