MEM-284: Κυματική Διάδοση

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

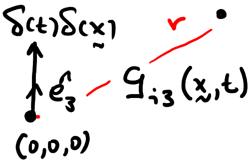
6η Διάλεξη - 10.3.2022

Θεώρημα αναπαράστασης

① $\delta(t)\,\delta(\underset{\sim}{x})\,\hat{e}_p$ η λύση είναι η $\mathcal{G}_{ip}(\underset{\sim}{x},t)$ $\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1p} \\ \mathcal{G}_{2p} \\ \mathcal{G}_{3p} \end{bmatrix}$

$p \in \{1,2,3\}$ q

$x_1 \;\; x_2 \;\; x_3$



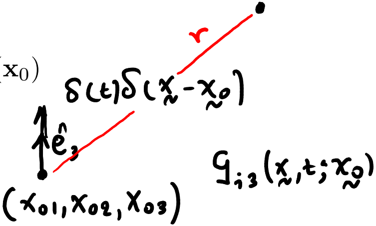
② $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x},t)$ → υπολογισμός της λύσης $\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},t)$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \int_0^\infty d\tau \int_V f_p(\mathbf{x}_0,\tau)\mathcal{G}_{ip}(\mathbf{x},t-\tau;\mathbf{x}_0)dV(\mathbf{x}_0) = \int_V f_p(\mathbf{x}_0,t) * \mathcal{G}_{ip}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0)dV(\mathbf{x}_0)$$

- Στο πεδίο συχνοτήτων $(t \to \omega)$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega) = \int_V f_p(\mathbf{x}_0,\omega)\mathcal{G}_{ip}(\mathbf{x},\omega;\mathbf{x}_0)dV(\mathbf{x}_0)$$

①b $\delta(t)\,\delta(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}_0)\,\hat{e}_p$



Λύση μακρινού πεδίου (far field)

$r \gg 1$

$$\mathcal{G}_{ip} = \mathcal{G}_{ip}^{P} + \mathcal{G}_{ip}^{S}$$

P-wave

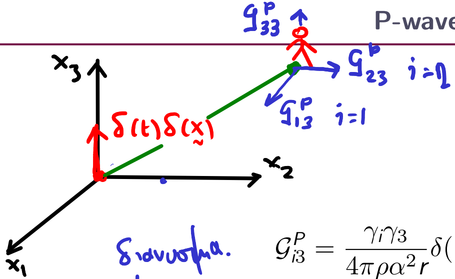
$$\mathcal{G}_{ip}^{P} = \frac{\gamma_i \gamma_p}{4\pi\rho\alpha^2 r}\delta(t - r/\alpha)$$

$\gamma_i = \frac{x_i}{r}$ $\quad r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$

S-wave

$$\mathcal{G}_{ip}^{S} = \frac{(\delta_{ip} - \gamma_i \gamma_p)}{4\pi\rho\beta^2 r}\delta(t - r/\beta)$$

P-wave - κατακόρυφη δύναμη



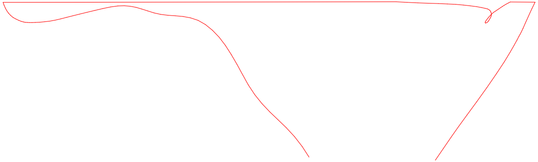
$\alpha = 5000$ m/s

$r = 10000$ m

διάνυσμα

$$\mathcal{G}^P_{i3} = \frac{\gamma_i\gamma_3}{4\pi\rho\alpha^2 r}\delta(t - r/\alpha) = \frac{\gamma_3}{4\pi\rho\alpha^2}\,\gamma_i\,\frac{1}{r}\,\delta(t - r/\alpha)$$

- $\dfrac{\gamma_3}{4\pi\rho\alpha^2}\gamma$: Πρότυπο ακτινοβολίας (radiation pattern). Κατευθυντικότητα
- $\dfrac{1}{r}$: Εξασθένιση με την απόσταση.
- $\delta(t - r/\alpha)$: Οδευών παλμός που απομακρύνεται με ταχύτητα α.



$\gamma_3 \underset{\sim}{\gamma}$

$\gamma_3 = \dfrac{x_3}{r}, \quad \underset{\sim}{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

$x_1 = r \sin\varphi \cos\theta$

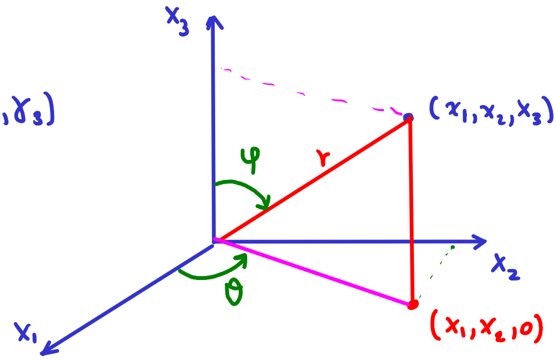
$x_2 = r \sin\varphi \sin\theta$

$x_3 = r \cos\varphi$

$\gamma_1 = \dfrac{x_1}{r} = \sin\varphi \cos\theta$

$\gamma_2 = \sin\varphi \sin\theta$

$\gamma_3 = \cos\varphi$



$(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow (r, \theta, \varphi)$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$\varphi \in [0, \pi]$

Μας ενδιαφέρει το μέτρο του $\gamma_3 \underset{\sim}{\gamma}$. Μέτρο μετατόπισης λόγω προσανατολισμ

$$\|\gamma_3 \underset{\sim}{\gamma}\| = |\gamma_3|\,\|\underset{\sim}{\gamma}\| = |\cos\varphi| \cdot \|\underset{\sim}{\gamma}\|$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \|\underset{\sim}{\gamma}\|^2 = \sin^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi =$$

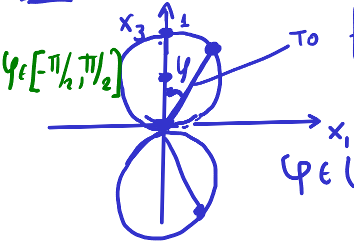
$$= \sin^2\varphi\,(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}) + \cos^2\varphi =$$

$$= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$ άρα $\|\underset{\sim}{\gamma}\| = 1$

$\|\gamma_3 \underset{\sim}{\gamma}\| = |\cos\varphi|$ ανεξάρτητο του θ.

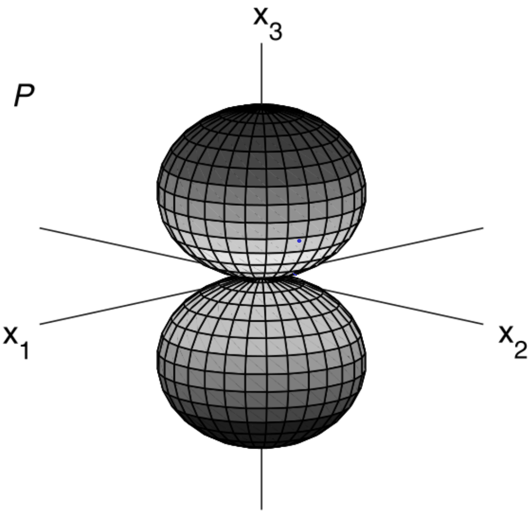
P-wave Πρότυπο ακτινοβολίας

$\underline{\theta = 0}$ $\quad$ $-x_1 x_3-$ $\quad$ $\propto |\cos\varphi|$ $\quad$ $\varphi \in [0, \pi]$ $\quad$ $x_3 = r\cos\varphi$



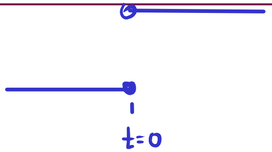
Το μήκος δηλώνει πόσο έντονο είναι το πεδίο λόγω της κατευθυντικότητας.

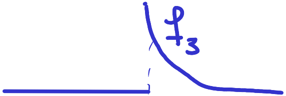
$\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$



P
x_3
x_1
x_2

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$





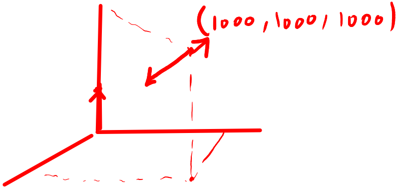
$f_1 = f_2 = 0$

Διάδοση p-wave στις 3 διαστάσεις

f_3

$$\mathbf{f} = (0, 0, H(t)e^{-t}\delta(\mathbf{x}))$$

- Απείρο μέσο με πυκνότητα $2500kg/m^3$ και ταχύτητα διάδοσης για p-wave $5600m/s$.
- Εφαρμογή με python.



$$G_{i3} = \frac{\gamma_3 \gamma_i}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{1}{r} \delta(t - r/\alpha) \qquad f_3(\underset{\sim}{x}, t) = H(t) e^{-t} \delta(\underset{\sim}{x})$$

$$u_i(\underset{\sim}{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_V f_3(\underset{\sim}{x}_0, \tau) G_{i3}(\underset{\sim}{x}, t-\tau; \underset{\sim}{x}_0) dV(\underset{\sim}{x}_0) =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_V H(\tau) e^{-\tau} \delta(\underset{\sim}{x}_0) G_{i3}(\underset{\sim}{x}, t-\tau; x_0) dV(\underset{\sim}{x}_0) =$$

$$= \int_0^t H(\tau) e^{-\tau} G_{i3}(\underset{\sim}{x}, t-\tau) d\tau =$$

$t-\tau-r/\alpha = 0 \Leftrightarrow \tau = t - r/\alpha$

$$= \frac{\gamma_3 \gamma_i}{4\pi\rho\alpha^2 r}\int_0^t H(\tau)\,e^{-\tau}\,\delta\left(t-\tau-r/\alpha\right)d\tau =$$

$$= \frac{\gamma_3 \gamma_i}{4\pi\rho\alpha^2 r} H\left(t - r/\alpha\right) e^{-\left(t-r/\alpha\right)}$$

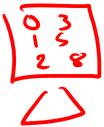
(x_1, x_2, x_3) 1 σημείο

$\underset{\cdot}{t}$ ← διάνυσμα με χρονικές στιγμές.
με διάσταση d

$\Big\} \rightarrow \underset{\sim}{u} \in \mathbb{R}^{3,d}$

```
    0  1  2
L = [3, 5, 8]

for i,e in enumerate(L):
    print(i,e)
```




```
i=0
for e in L:
    print(i,e)
    i+=1
```