MEM-284: Κυματική Διάδοση

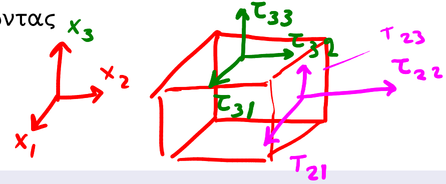
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

4η Διάλεξη - 25.2.2022

Δεν θα μελετήσουμε την παραγωγή της γραμμικοποιημένης κυματικής εξίσωσης.
Αναφέρουμε όμως ότι προκύπτει χρησιμοποιώντας

- Διατήρηση μάζας
- Διατήρηση ορμής.
- Διατήρηση στροφορμής.



Συμβολισμοί

- $u_{,k} = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \quad u_{i,k} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}$
- $\dot{u} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad \ddot{u} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$u_t \equiv \dot{u} \qquad u_{tt} \equiv \ddot{u}$

$\Sigma^T = \Sigma$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

Μεγέθη

- $\mathbf{u}$ - Διάνυσμα μετατοπίσεων. $\to u_1, u_2, u_3$
- τ_{ij} - Τάσεις (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας), ορίζουν (συμμετρικό) πίνακα τάσεων Σ.
- $\mathbf{f}$ - δύναμη πεδίου. $\underset{\sim}{f} = (f_1, f_2, f_3)$

Για ευκολία θα κάνουμε χρήση του συμβολισμού που εισήγαγε ο Albert Einstein για να γράφουμε τα αθροίσματα συνοπτικά.

- Εάν σε γινόμενα εμφανίζεται ένας δείκτης **ακριβώς 2 φορές** τότε υπάρχει άθροισμα για κάθε δυνατή τιμή του δείκτη.

Παράδειγμα - Εσωτερικό γινόμενο στις 3 διαστάσεις

$\alpha_{ii} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_i b_i$$

Παράδειγμα

$$a_{ij} b_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$$

- Γραμμικοποιημένη κυματική εξίσωση για την διάδοση κυμάτων σε ελαστικό μέσο

$$\boxed{\tau_{ik,k} + f_i = \rho \ddot{u}_i}$$

Παραμόρφωση

$$\varepsilon = \left[u_{1,1} \quad \frac{u_{2,1} + u_{1,2}}{2} \quad \dots \right.$$

$$\epsilon_{ij} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$$

$$\partial_i u_j = \frac{\partial}{\partial x_i} u_j$$

Νόμος του Hook (για ομογενές και ισοτροπικό μέσο διάδοσης)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

$$= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

- λ, μ σταθερές ελαστικότητας Lame.

$u_{1,i1} + u_{2,i2} + u_{3,i3}$

$$(\lambda+\mu)u_{k,ik} + \mu u_{i,kk} + f_i = \rho\ddot{u}_i$$

$i=1$, $i=2$, $i=3$

$$\begin{bmatrix} \partial x_1 u_1 + \partial x_2 u_1 + \partial x_3 u_1 \\ \partial x_1 u_2 + \partial x_2 u_2 + \partial x_3 u_2 \\ \partial x_1 u_3 + \partial x_2 u_3 + \partial x_3 u_3 \end{bmatrix}$$

- Σε διανυσματική μορφή έχουμε

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f} = \rho\ddot{\mathbf{u}}$$

- Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\nabla^2\mathbf{u} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \nabla\times\nabla\times\mathbf{u}$ γράφουμε ισοδύναμα

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \rightarrow$

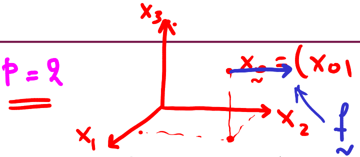
$$(\lambda+2\mu)\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{u}}_{\nabla^2\varphi}) - \mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} + \mathbf{f} = \rho\ddot{\mathbf{u}}$$

$\underset{\sim}{u} = \nabla\varphi + \nabla\times\underset{\sim}{\psi}$

$\nabla\cdot\underset{\sim}{u} = (\nabla\cdot\nabla)\varphi = \nabla^2\varphi$

$\nabla\ddot{\varphi} + \nabla\times\ddot{\underset{\sim}{\psi}}$

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$



$\underset{\sim}{f} : \quad f_i(\underset{\sim}{x}, t ; \underset{\sim}{x_0})$

$\underset{\sim}{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$

$G_{i2} \;—\; G_{12}, G_{22}, G_{32}$

Συμβολίζουμε ως $\mathcal{G}_{ip}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ την i-συνιστώσα της λύσης της κυματικής εξίσωσης με την παρουσία της δύναμης $f_i(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \delta_{ip}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t)$

$\delta(x_1 - x_{10})\,\delta(x_2 - x_{20})\,\delta(x_3 - x_{30})$

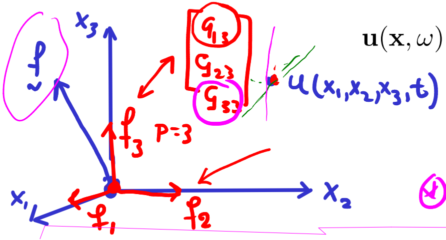
Θεώρημα αναπαράστασης

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty d\tau \int_V f_p(\mathbf{x}, \tau)\mathcal{G}_{ip}(\mathbf{x}, t - \tau; \mathbf{x}_0)dV(\mathbf{x}_0) = \int_V f_p(\mathbf{x}, t) * \mathcal{G}_{ip}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)dV(\mathbf{x}_0)$$

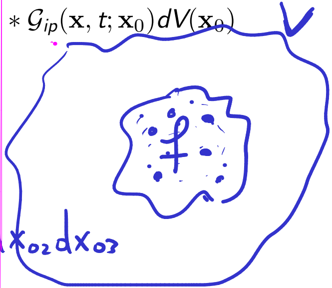
(*)

- Στο πεδίο συχνοτήτων $(t \to \omega)$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \int_V f_p(\mathbf{x}, \omega)\mathcal{G}_{ip}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0)dV(\mathbf{x}_0)$$



$dx_{01}\, dx_{02}\, dx_{03}$



$(*) = \int_V \sum_{p=1}^{3} f_p * G_{ip}\, dV$

$$\nabla\phi = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}\phi \\ \partial_{x_2}\phi \\ \partial_{x_3}\phi \end{bmatrix}$$

Παραμόρφωση   Στροφή.

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\psi}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{\psi} = 0$$

$$\ddot{u} = \nabla\ddot{\varphi} + \nabla\times\ddot{\psi}$$

$$\rho\ddot{u} = (\lambda+2\mu)\nabla\left(\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\ddot{\varphi}\right) + \mu\nabla\times\left(\frac{\rho}{\mu}\ddot{\psi}\right)$$

Υποθέτουμε την περίπτωση χωρίς εξωτερική δύναμη πεδίου ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$)

$$\nabla\times\psi = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \partial x_1 & \partial x_2 & \partial x_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

$$(\lambda+2\mu)\nabla\left[\nabla^2\phi - \alpha^{-2}\ddot{\phi}\right] + \mu\nabla\times\left[\nabla^2\boldsymbol{\psi} - \beta^{-2}\ddot{\boldsymbol{\psi}}\right] = \mathbf{0}$$

$$\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$$

- Οδηγούμαστε στις κυματικές εξισώσεις για τα δυναμικά μετατόπισης

$$\partial_{x_1}\psi_1 + \partial_{x_2}\psi_2 + \partial_{x_3}\psi_3 = 0.$$

$$\nabla^2\phi - \alpha^{-2}\ddot{\phi} = 0, \quad \alpha^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$$

$$u_{xx} - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

$$\phi_{x_1x_1} + \phi_{x_2x_2} + \phi_{x_3x_3} - \alpha^{-2}\ddot{\phi} = 0$$

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi} - \beta^{-2}\ddot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{0}, \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

4 εξισώσεις.

- Παρατηρούμε ότι $\alpha^2 > \beta^2$

Εξίσωση Poisson

$$\boxed{\nabla^2 u = f}$$

$f = \delta(x - x_0)$

$\cdot x_0$

$$\iiint_V \delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0) f(\underset{\sim}{x})\, dV = f(\underset{\sim}{x}_0)$$

G

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \nabla^2 \left(\frac{-1}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right)$$

Τι μπορούμε να πούμε για την παραπάνω σχέση?

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

$$\|x - x_0\| = \left((x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2 \right)^{1/2} = r$$

απόσταση του $\underset{\sim}{x}$ από το $\underset{\sim}{x}_0$

Αντίστροφος μετ. Fourier.

λύσεις στο πεδίο συχνοτήτων.

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \phi(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = \int \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

$\Phi(x, \omega)$

Εξισώσεις Helmholtz

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, \omega) + k_\alpha^2 \phi(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad k_\alpha^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \omega) + k_\beta^2 \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{0}, \quad k_\beta^2 = \frac{\omega^2}{\beta^2}$$

$$\nabla^2 \varphi - \alpha^{-2}\ddot{\varphi} = 0 \qquad \varphi(x,t) = \int \Phi(x,\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$\nabla^2 \varphi = \int \nabla^2 \Phi\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$\ddot{\varphi} = \int \Phi\, (-i\omega)^2 e^{-i\omega t} d\omega = \int (-\omega^2)\, \Phi\, e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\int \left[\nabla^2 \Phi + \frac{\omega^2}{\alpha^2}\Phi\right] e^{-i\omega t} d\omega = 0 \qquad [\omega] = rad/s$$

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\omega^2}{\alpha^2}\Phi = 0 \qquad k_\alpha^2 = \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2$$