ΜΕΜ-284: Κυματική Διάδοση

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

3η Διάλεξη - 24.2.2022

$f(x,t)$

$$u_{xx} - c^{-2} u_{tt} + f = 0$$

$$u(x,0) = F(x), \quad u_t(x,0) = G(x)$$

Θα ορίσουμε 2 απλούστερα προβλήματα

Πρώτο πρόβλημα (Π1)

$$v_{xx} - c^{-2} v_{tt} = 0$$

$$v(x,0) = F(x), \quad v_t(x,0) = G(x)$$

Έχει γνωστή λύση (d'Alembert)

$$v(x,t) = \frac{F(x-ct) + F(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\xi)\,d\xi$$

Μη ομογενής κυματική εξίσωση (1D)

Δεύτερο πρόβλημα (Π2)

$$w_{xx} - c^{-2} w_{tt} + f = 0$$

$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0$$

Λήμμα

Εάν v, w οι λύσεις των Π1,Π2 αντίστοιχα, τότε η $u = v + w$ είναι η λύση της μη ομογενούς κυματικής εξίσωσης.

Αθροίζουμε τις εξισώσεις για v, w
και τις αρχικές συνθήκες.

Για την αντιμετώπιση του Π2 θα ορίσουμε άλλο ένα βοηθητικό πρόβλημα

Τρίτο πρόβλημα (Π3) με παράμετρο τ

$$q_{xx}(x,t;\tau) - c^{-2} q_{tt}(x,t;\tau) = 0,$$

$q(x,t;\tau)$

$\forall \tau$

$$q(x,\tau;\tau) = 0, \quad q_t(x,\tau;\tau) = c^2 f(x,\tau)$$

$q(x,t;t) = 0 \qquad q_t(x,t;t) = c^2 f(x,t)$

Λήμμα

Εάν $q(x,t;\tau)$ αποτελεί τη λύση του Π3 τότε

$w_x = \frac{\partial}{\partial x} w$

$$w(x,t) = \int_0^t q(x,t;\tau)\,d\tau$$

αποτελεί λύση του Π2

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right) = \int_{\alpha(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt + f(x,b(x))\,b'(x) - f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x)$$

$$w_{xx}(x,t) = \int_0^t q_{xx}(x,t;\tau)\,d\tau.$$

$$w_t(x,t) = \int_0^t q_t(x,t;\tau)\,d\tau + \underbrace{q(x,t;t)}_{=0}$$

$$w_{tt}(x,t) = \int_0^t q_{tt}(x,t;\tau)\,d\tau + \underbrace{q_t(x,t;t)}_{c^2 f(x,t)}$$

$$= \int_0^t q_{tt}(x,t;\tau)\,d\tau + c^2 f(x,t)$$

$$c^{-2} w_{tt}(x,t) = \int_0^t c^{-2} q_{tt}(x,t;\tau)\,d\tau + f(x,t).$$

Π2 $\quad w_{xx} - c^{-2} w_{tt} + f = 0 \qquad w(x,0) = 0\,, \quad w_t(x,0) = 0$

$$w_{xx} - c^{-2} w_{tt} = \int_0^t \underbrace{\left\{ q_{xx}(x,t;\tau) - c^{-2} q_{tt}(x,t;\tau) \right\}}_{\overset{\shortparallel}{0} \quad (\Pi 3)} d\tau - f(x,t)$$

$$w(x,t) = \int_0^t q(x,t;\tau)\,d\tau \;\to\; w(x,0) = \int_0^0 \cdots \, d\tau = 0$$

$$w_t(x,t) = \int_0^t q_t(x,t;\tau)\,d\tau \;\longrightarrow\; w_t(x,0) = \int_0^0 \cdots \, d\tau = 0$$

Λύση του Π3

$$q_{xx}(x,t;\tau) - c^{-2} q_{tt}(x,t;\tau) = 0 \qquad t \geq \tau$$

$$q(x,\tau;\tau) = 0 \qquad q_t(x,\tau;\tau) = c^2 f(x,\tau)$$

$$t^* = t - \tau$$

$$q_{xx}(x,t^*) - c^{-2} q_{t^*t^*}(x,t^*) = 0$$

$$q(x,0) = 0 \qquad q_{t^*}(x,0) = c^2 f(x,0)$$

$$q(x,t;\tau) = \frac{c^{\cancel{2}}}{2\cancel{c}} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi .$$

$$u_{xx} - c^{-2} u_{tt} + f = 0$$

$$u(x,0) = F(x), \quad u_t(x,0) = G(x)$$

Λύση του προβλήματος

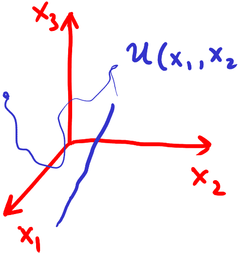
$$u(x,t) = \overset{\Pi 1}{\boxed{\frac{F(x-ct)+F(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\xi)\,d\xi}} + \overset{\Pi 2}{\boxed{\frac{c}{2}\int_0^t \overset{\Pi 3}{\boxed{\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi}}\,d\tau}}$$

Κυματική εξίσωση στον χώρο (3D)

$\mathbb{R}^3$

Στη συνέχεια του μαθήματος θα ασχοληθούμε με προβλήματα τις μορφής

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad u = u(\mathbf{x}, t), \quad f = f(\mathbf{x}, t), \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$



$u(x_1, x_2, x_3, t)$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

$$\nabla^2 u - c^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f = 0,$$

$$u(\mathbf{x}; 0) = F(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}; 0) = G(\mathbf{x})$$

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} - c^{-2} u_{tt} + f = 0$$