MEM-284: Κυματική Διάδοση

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

2η Διάλεξη - 18.2.2022

$$\int_{-\infty}^{x} f'(\xi)\,d\xi = f(x) - \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Μονοδιάστατη (1D) κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Αρμονικά κύματα

$$\exp(ix) = \cos x + i\sin x$$

$$u(x,t) = A\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

Τυπικα: $u^*(x,t) = \mathrm{Re}\{u(x,t)\}$ $\quad A \in \mathbb{C} \to \exists\, r, \vartheta \in [0, 2\pi)$ τ.ω. $A = r e^{i\theta}$

- Κυκλική συχνότητα (angular frequency): ω.
- Αριθμός κύματος (wavenumber): $k = \omega/c$.

Για κάθε k η $u(x,t)$ αποτελεί λύση της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης για $\omega = ck$.

$$u(x,t) = r e^{i\theta} e^{i(kx-\omega t)} = r e^{i(kx-\omega t+\vartheta)} \qquad \mathrm{Re}(u(x,t)) = r\cos(kx-\omega t+\vartheta)$$

$u_x = iku \quad , \quad u_{xx} = -k^2 u$

$u_t = -i\omega u \quad , \quad u_{tt} = -\omega^2 u$

$u_{xx} - c^{-2} u_{tt} = 0$

$-k^2 u + c^{-2}\omega^2 u = 0 \iff \dfrac{\omega^2}{c^2} = k^2$ ή $\omega^2 = c^2 k^2$

$$\boxed{\omega = \pm ck}$$

$\boxed{c = \dfrac{\omega}{k}} \leftarrow$ Ταχύτητα.

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0$$

- Αναζητούμε αρμονικές λύσεις

$$u(x,t) = \underbrace{A\exp\{i(kx - \omega t)\}}_{f(x-ct)} = A\exp\left\{ik\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)\right\}$$

$$c = \frac{\omega}{k}$$

Σχέση διασποράς (dispersion relation): $\omega(k)$

- Δείχνει πως πρέπει να συνδέονται η συχνότητα και ο αριθμός κύματος ώστε να έχει μια εξίσωση αρμονική λύση.

$$u_t = -i\omega u \qquad u_x = iku \qquad u_{xxx} = -ik^3 u$$

$$-i\omega + ik - ik^3 = 0 \Rightarrow \omega(k) = k - k^3 \qquad c = \frac{\omega(k)}{k} = 1 - k^2$$

$$\frac{d\omega(k)}{dk} = 1 - 3k^2 = c_g \leftarrow$$ Ταχύτητα ομάδας.

Έστω $k \in \left[k_0 - \frac{dk}{2}, k_0 + \frac{dk}{2}\right]$

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k-k_0)\frac{d\omega}{dk}(k_0) + O\left((k-k_0)^2\right) = \omega_0 + (k-k_0)\,\omega_0'$$

Επιπλέον

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\exp\{i(kx - \omega(k)t)\}dk$$

$+k_0x - k_0x$

$$= \int A(k)\exp\{i(kx - \omega_0 t - (k-k_0)\omega_0' t)\}dk$$

- Σχηματισμός κυματικών πακέτων (wave packets)
- Ταξιδευουν με ταχύτητα ομάδας (group velocity) c_g

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$= e^{i(k_0x - \omega_0 t)} \cdot \underbrace{\int A(k)\, e^{i(k-k_0)(x-\omega_0' t)}\, dk}_{f(x-\omega_0' t\,;\,k)}$$

Εν γένει στα κυματικά φαινόμενα ισχύει

$$c_g < c = \frac{\omega}{k}$$

Παράδειγμα

$u_1(x,t) = \cos(x-t)$

$u_2(x,t) = \cos(2x-3t)$

$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

$k_1, k_2 = ;$ $c = ;$ $c_g = ;$

Μετασχηματισμός Fourier

$$U(x,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t} u(x,t)\,dt$$

$\int e^{i\omega t} u(x,t)\,dt$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp i\omega t} U(x,\omega)\,d\omega$$

$\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t} U(x,\omega)\,d\omega$

Μετασχηματισμός Fourier

$$U(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ikx} u(x, t) dx$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp ikx} U(k, t) dk$$

$$(u_1 * u_2)(t)$$

$$u_1(t) * u_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau)\, u_2(t-\tau)\, d\tau$$

Ιδιότητες

Ιδιότητα	Συνάρτηση	Μετασχηματισμός Fourier
Πολλαπλασιασμός	$\underline{u_1(t)u_2(t)}$	$(2\pi)^{-1}U_1(\omega) * U_2(\omega)$
→ Συνέλιξη (convolution)	$u_1(t) * u_2(t)$	$U_1(\omega)U_2(\omega)$ ← Άσκηση.
Μεταφορά (translation)	$u(t-t_0)$	$e^{\pm i\omega t_0}U(\omega)$
Διαμόρφωση (modulation)	$e^{i\xi t}u(t)$	$U(\omega \pm \xi)$
Αλλαγή κλίμακας (scalling)	$u(t/s)$	$\mid s \mid U(s\omega)$
Παράγωγος (derivative)	$u^{(p)}(t)$	$(\mp i\omega)^p U(\omega)$

$$dt^* = dt$$

$$\int\int u_1(\tau)\, u_2(t-\tau)\, d\tau\, e^{i\omega t} dt = \int u_1(\tau) \int u_2(\underbrace{t-\tau}_{t^*})\, e^{i\omega t}\, dt\, d\tau =$$

$$= \int u_1(\tau)\, e^{i\omega\tau} d\tau \int u_2(t^*)\, e^{i\omega t^*} dt^* = U_1(\omega)\, U_2(\omega)$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\exp\{i(kx-\omega(k)t)\}dk$$

τι εκφράζει το $A(k)$?

$\underline{\underline{t=0}}$

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\exp(ikx)dk$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(k,t)\exp(ikx)dk$$

Χωρικός μετασχηματισμός Fourier.

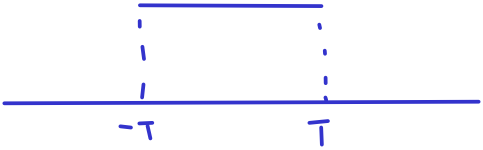
$$A(k) = \frac{1}{2\pi}U(k,0) = \mathcal{F}_{x\to k}\{u(x,0)\}$$

Παράδειγμα

Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της δείκτριας συνάρτησης (indicator function) $u(t) = 1_{[-T,T]}(t), \;\; T > 0$

$U(\omega) = ;$

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[-T,T]}(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \int_{-T}^{T} e^{-i\omega t}\, dt = \cdots = -i\omega$$



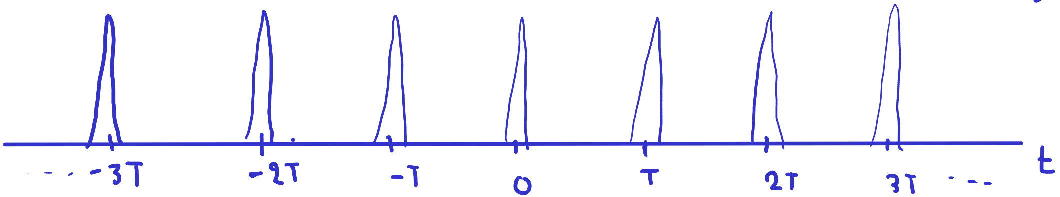
$$= \int_{-T}^{T} \frac{\left(e^{-i\omega t}\right)'}{-i\omega}\, dt$$

$$= -\frac{1}{i\omega}\left[e^{-i\omega t}\right]_{-T}^{T}$$

Παράδειγμα

Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, $T > 0$.

$U(\omega) = ;$



$\delta(t-nT)$ για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)\, e^{i\omega t}\, dt = e^{i\omega n T}$$

$$\int \delta(x-x_0) f(x)\, dx = f(x_0)$$

άρα $\boxed{U(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega n T}}$