ΜΕΜ-284: Κυματική Διάδοση

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

13η Διάλεξη - 19.5.2022

$u(\omega) \to u(t)$ $\quad$ $u(t)\,,\ t \geq 0$

$u(\omega_i) \longrightarrow u(t_i)$

Ιδιότητες συνέλιξης

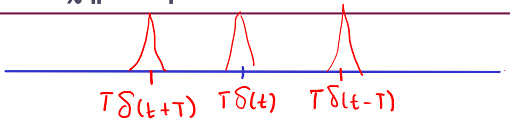
time-domain

$$f(t) * g(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} f(\omega)g(\omega)$$

$$f(t)g(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} f(\omega) * g(\omega)$$

frequency-domain

Έχουμε δείξει στο προηγούμενο μάθημα



$$\delta_T(t) = \sum_n \delta(t - nT) \leftrightarrow \delta_T(\omega) = \omega_s \sum_k \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = 2\pi/T$$

Συνάρτηση δειγματοληψίας στο πεδίο του χρόνου time-sampler

- Δοσμένο $T > 0$ $\rightarrow \omega_s$

$$S_T(t) = T\delta_T(t) = T\sum_m \delta(t - mT) \overset{\tilde{F}}{\leftrightarrow} S_T(\omega) = 2\pi \sum_k \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = 2\pi/T$$

time

frequency.

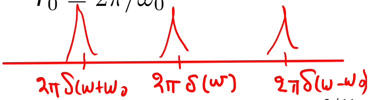
Συνάρτηση δειγματοληψίας στο πεδίο των συχνοτήτων frequency-sampler

- Δοσμένο $\omega_0 > 0$

$$S_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_k \delta(\omega - k\omega_0) \overset{F^2}{\leftrightarrow} S_{\omega_0}(t) = \sum_m \delta(t - mT_0), \quad T_0 = 2\pi/\omega_0$$

frequency

time.



$f(t),\ t\in\mathbb{R}$ $\qquad f_s(t)$

$$f_s(t) = f(t)\,T\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta(t-mT) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} T\,\underbrace{f(t)\,\delta(t-mT)}_{\neq 0\ \ t=mT} =$$

Έστω $f(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $f(\omega)$.

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} T\,f(mT)\,\delta(t-mT)$$

$$f_s(t) = f(t)S_T(t)$$

$$\left(f(t)\,\delta(t-mT) = \begin{cases} \infty\ f(t) & t=mT \\ 0 & \end{cases} \right)$$

$$f_s(t) \leftrightarrow \tilde{f}(\omega) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} Tf(mT)e^{-i\omega mT}$$

- Θα δείξουμε ότι $\tilde{f}(\omega)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο ω_s.

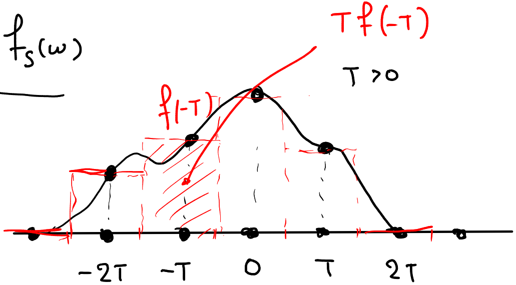
$$f_s(\omega) = \int_{\mathbb{R}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} T\,f(mT)\,\delta(t-mT)\,e^{-i\omega t}\,dt = \sum_{m\in\mathbb{Z}} T\,f(mT)\int_{\mathbb{R}}\delta(t-mT)\,e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} T\,f(mT)\,e^{-i\omega mT}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$f_s(\omega + k\omega_s) = \underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}} T f(mT)\, e^{-i\omega mT}}_{f_s(\omega)}\, e^{-ik\omega_s mT} = f_s(\omega)\, e^{-ikm2\pi} = f_s(\omega)$$

$$\tilde{f}(\omega) = f_s(\omega)$$



Στοιχεία Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier

Διακριτό σήμα

$$f_d[mT] = Tf(mT)$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

$$f_d[mT] \leftrightarrow \tilde{f}(\omega) = \sum_m f_d[mT] e^{-i\omega mT}$$

$$f_s(t) \xrightarrow{F} \tilde{f}(\omega) = \sum_m T f(mT) e^{-i\omega mT}$$

$$t = nT$$

$$f_d[nT] \rightarrow \sum_m f_d[mT]\, e^{-i\omega mT}$$

Θα δείξουμε ότι

$$f(t) \leftrightarrow \hat{f}(\omega) \qquad f * g = g * f$$

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega - \ell\omega_s)$$

$$f_s(t) = f(t)\, S_T(t) \Rightarrow \tilde{\hat{f}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(\omega) * \hat{S}_T(\omega) = \frac{1}{\cancel{2\pi}} \hat{f}(\omega) * \cancel{2\pi} \sum_{\ell} \delta(\omega - \ell\omega_s)$$

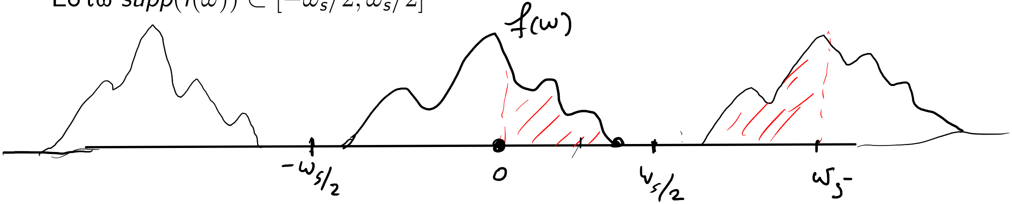
$$\hat{S}_T(\omega) = 2\pi \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - \ell\omega_s)$$

$$\hat{f}_s(\omega)$$

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega) * \delta(\omega - \ell\omega_s) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, \delta(\omega - \ell\omega_s - \xi)\, d\xi =$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega - \ell\omega_s)$$

Έστω $supp(f(\omega)) \subset [-\omega_s/2, \omega_s/2]$



$$T \to \omega_s$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_n f_d[nT] e^{-i\omega n T}$$

- Περιοδική με περίοδο ω_s

Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

$$f_d[nT] = \frac{1}{\omega_s} \int_0^{\omega_s} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega n T} d\omega$$

$$\mathrm{supp}(\hat{f}(\omega)) \subset [-\omega_s/2, \omega_s/2]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega n T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \hat{f}(\omega) e^{i\omega n T} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega nT}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\omega_s} \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega nT}\, d\omega$$

$$T f(t) = \frac{T}{2\pi}\int_0^{\omega_s} \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega nT}\, d\omega \qquad t = nT$$

$$T f(nT) = \frac{1}{\omega_s}\int_0^{\omega_s} \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega nT}\, d\omega$$

$$\shortparallel$$

$$f_d[nT]$$

$W_0 \to T_0$

Mallat
A wavelet tour of signal processing.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτης συχνότητας

$$f_d[k\omega_0] = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{f}(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτής συχνότητας

$$\tilde{f}(t) = \sum_k f_d[k\omega_0] e^{ik\omega_0 t}$$

- Περιοδική με περίοδο T_0

Στοιχεία Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

1. $T > 0$ $nT \leftarrow$ διακριτοί χρόνοι $\xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{F}(\omega)$ περίοδο $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

2. $\omega_0 > 0$ $k\omega_0 \leftarrow$ διακριτές συχνότητες $\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \tilde{f}(t)$ περίοδο $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Χρησιμοποιούμε time-Sampler $S_T(t)$ $-T \quad 0 \quad T \quad 2T$

$\cdot S_{\omega_0}$ $\tilde{f}_d[k\omega_0]$

$$f(t) \xrightarrow{\cdot S_T} f_d[nT] \xrightarrow{\mathcal{F}_{dt}} \tilde{f}(\omega)$$

περιοδική με περίοδο $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$

εφαρμογή frequency sampler

Χρησιμοποιούμε frequency-Sampler $-\omega_0 \quad 0 \quad \omega_0 \quad 2\omega_0$

$\cdot S_T$ $\tilde{f}_d[nT]$

$$f(\omega) \xrightarrow{\cdot S_{\omega_0}} f_d[k\omega_0] \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}_{d\omega}} \tilde{f}(t)$$

περιοδική με περίοδο $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

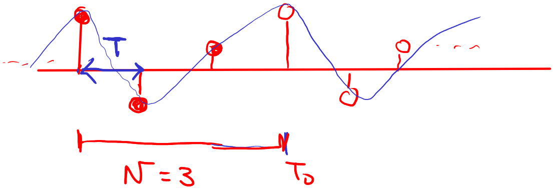
εφαρμογή time-sampler

⋮

$$\tilde{f}_d[nT] \underset{d\mathcal{F}^{-1}}{\overset{d\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \tilde{f}_d[k\omega_0]$$

$T = ;$ $\rightarrow$ $\omega_s = ;$

$T_0 = ;$ $\rightarrow$ $\omega_0 = ;$



$\exists N \in \mathbb{N}$ τ.ω $T_0 = NT$ $\exists K \in \mathbb{N}$ τ.ω $\omega_s = K\omega_0$

$$K = \frac{\omega_s}{\omega_0} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{T_0}} = \frac{T_0}{T} = \frac{NT}{T} = N$$

Στοιχεία Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

$$\tilde{f}_d[k\omega_0] = \frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{f}_d[nT]e^{-ik\omega_0 nT}$$

Αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier

$$\tilde{f}_d[nT] = T\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{f}_d[k\omega_0]e^{ik\omega_0 nT}$$

- $\hat{f}[k] = \tilde{f}_d[k\omega_0]$ $\hat{f}[k] = \tilde{f}_d[k\omega_0]$
- $f[n] = \tilde{f}_d[nT]$ $f[n] = \tilde{f}_d[nT]$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

$$\hat{f}[k] = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-ik(2\pi/N)}$$

Αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier

$$f[n] = T \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{ik(2\pi/N)}$$

Παράδειγμα

$0 \quad \omega_s \quad 2\omega_s$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο μετατοπίσεων για διάρκεια $10s$, στο ευρος συχνοτήτων $(0,1)Hz$. Ποια θα ήταν μια καλή επιλογή για τα ω_0, T, N;

u_1, u_2, u_3

$\omega = 2\pi f$

radians   Hz

$\omega \in [0, 2\pi]$

$\omega_n \in \{ \dots \}$ διαμέριση του $(0, 2\pi)$

linspace$(0, 2\pi, 32)$

$\operatorname{supp} u(\omega) \subset [-\omega_s/2, \omega_s/2]$

$\boxed{2\pi \leq \omega_s/2}$

$\omega_s \geq 4\pi$

2π

$-\omega_s/2 \quad 0 \quad \omega_s/2$

$10 = T_0 = NT$

$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{10}$

$T \leq 0.5$

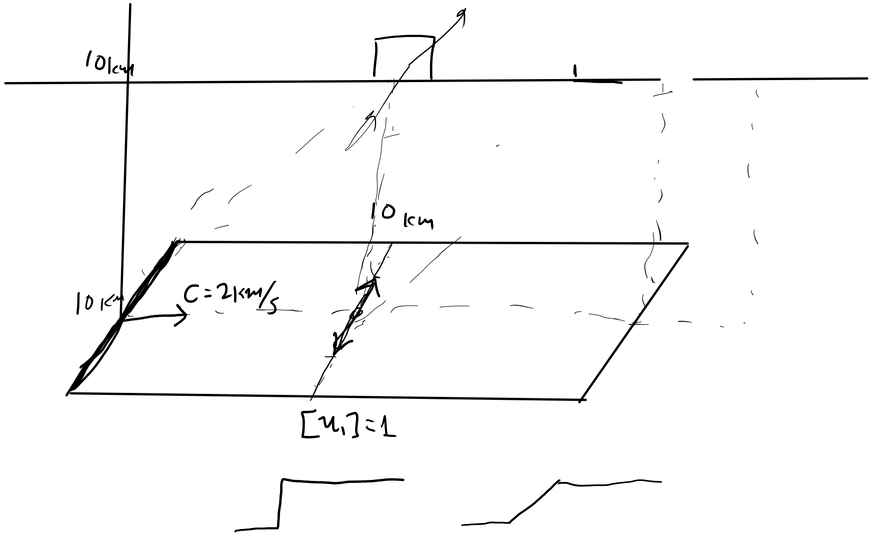
$f_s = \frac{1}{T}$ sampling frequency.

$N \geq 20$

$N = 32$

$T = \frac{10}{32}$

$\omega_0 = 0 \qquad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega_2 = 2\frac{2\pi}{T}$


10km
10 km
10 km
C = 2km/s
[u_1] = 1