

# MEM-264 Applied Statistics

Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Crete

Costas Smaragdakis (kesmarag@uoc.gr)

1st set : 11-03-2021

## Exercise 1

Let  $X_1, X_2, X_3$  be an i.i.d sample with  $X_1 \sim \text{Bin}(3, \theta)$ ,  $\theta \in (0.5, 1)$ .

$$H_0 : \theta = 0.5 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \in (0.5, 1)$$

For  $\alpha = 0.05$  and observations  $(1, 2, 1)$  should we reject the null hypothesis?

## Exercise 2

Let  $X_1, \dots, X_n$  be an i.i.d sample with  $X_1 \sim \text{Po}(\theta)$ . Consider the problem.

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 2$$

Find the Neyman-Pearson test function.

## Exercise 3

Let  $f(x, \theta)$  be a probability mass function of a discrete random variable  $X$  of sample space  $\mathcal{X} = \{2, \dots, 8\}$ . We consider the test problem:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1.$$

The probabilities for both models are given by the following table.

$x$	2	3	4	5	6	7	8
$f(x; \theta_0)$	0.05	0.02	0.33	0.1	0.2	0.1	0.2
$f(x; \theta_1)$	0.01	0.3	0.01	0.18	0.2	0.2	0.1

Find the Neyman-Pearson test function.

## Exercise 4 (correction)

Let  $X$  be a discrete random variable with sample space  $\mathcal{X} \in [-0.5, 1]$ . The random variable obeys a uniform distribution  $U[-0.5 + \theta, 0.5 + \theta]$ , where  $\theta \in \{0, 0.5\}$ . We consider the following test problem:

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 0.5$$

Propose a test function.

## Exercise 5

Let  $X_1, X_2, X_3$  be an i.i.d sample with  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \theta), \mu \in \mathbb{R}, \theta > 0$ .

1. For the realizations 0.75, 2.3, 0.25 of  $X_1, X_2, X_3$  find the maximum likelihood estimator  $\hat{\mu}_{ml}$  of  $\mu$ .
2. Consider the following test problem:

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 2.$$

Construct a proper test function by using  $\mu = \hat{\mu}_{ml}$  (bootstrapping) and say whether or not we should reject the null hypothesis.

## Άσκηση 1

Έστω  $X_1, X_2, X_3$  ένα i.i.d (ανεξάρτητες και ισόνομες) δείγμα με  $X_1 \sim \text{Bin}(3, \theta), \theta \in (0.5, 1)$ .

$$H_0 : \theta = 0.5 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \in (0.5, 1)$$

Για  $\alpha = 0.05$  και παρατηρήσεις  $(1, 2, 1)$  θα έπρεπε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση;

## Άσκηση 2

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  ένα i.i.d δείγμα με  $X_1 \sim \text{Po}(\theta)$ . Θεωρήστε το πρόβλημα.

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 2$$

Βρείτε την ελεγχουσυνάρτηση (test function) κατά Neyman-Pearson.

## Άσκηση 3

Έστω  $f(x, \theta)$  είναι μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής  $X$  με δειγματικό χώρο  $\mathcal{X} = \{2, \dots, 8\}$ . Θεωρούμε το πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1.$$

Οι πιθανότητες για τα δύο μοντέλα δίνονται από τον πίνακα:

$x$	2	3	4	5	6	7	8
$f(x; \theta_0)$	0.05	0.02	0.33	0.1	0.2	0.1	0.2
$f(x; \theta_1)$	0.01	0.3	0.01	0.18	0.2	0.2	0.1

Βρείτε την ελεγχουσυνάρτηση (test function) κατά Neyman-Pearson.

## Άσκηση 4 (διόρθωση)

Έστω  $X$  μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με δειγματικό χώρο discrete  $\mathcal{X} \in [-0.5, 1]$ . Η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή  $U[-0.5+\theta, \theta+0.5]$ , όπου  $\theta \in \{0, 0.5\}$  Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων:

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 0.5$$

Προτείνετε μια ελεγχουσυνάρτηση (test function).

## Άσκηση 5

Έστω  $X_1, X_2, X_3$  ένα i.i.d δείγμα με  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \theta)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\theta > 0$ .

1. Για τις πραγματοποιήσεις 0.75, 2.3, 0.25 των  $X_1, X_2, X_3$  βρείτε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας  $\hat{\mu}_{ml}$  της  $\mu$ .
2. Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα:

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 2.$$

Κατασκευάστε κατάλληλη ελεγχουσυνάρτηση (test function) έχοντας  $\mu = \hat{\mu}_{ml}$  (bootstrapping) και πείτε εάν θα έπρεπε ή όχι να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση.