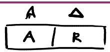
MEM-262 Παραμετρική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτη

Διδάσκων : Κώστας Σμαραγδάκης

Διάλεξη 8 : 27-10-2020

Παράδειγμα : Το σμαραγδένιο κολιέ



- 2 θήκες για κολιέ (αριστερή, δεξιά)
- Ένα αυθεντικό σμαραγδένιο κολιέ (1εκ ευρώ) και ένα αντίγραφο (πρακτικά 0 ευρώ), τυχαία (με ίση πιθανότητα) τοποθετημένα στις θήκες.
- Μια γριά θεία που καταλαβαίνει με πιθανότητα 1 το αυθεντικό αρκεί να εξετάσει αυτό πρώτο, ενώ με πιθανότητα 1/2 εάν δει το αυθεντικό δεύτερο. Η θεία πάντα ξεκινά την εξέταση από την αριστερή θήκη.
- **Γνωρίζουμε επιπλέον ότι το πραγματικό κολιέ τοποθετείται με πιθανότητα** $\psi \in [0,1]$ **στην αριστερή θήκη**.

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \psi & \text{αν } \theta = 1 \\ 1-\psi & \text{αν } \theta = 2 \end{cases}, \quad \psi \in [0,1]$$

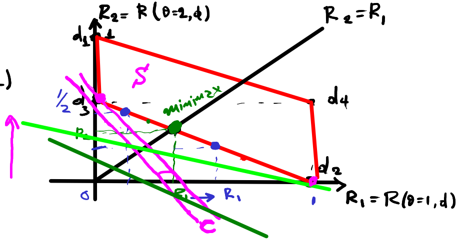
$\theta = 1$ Το πραγματικό στα αριστερά
$\theta = 2$ » δεξιά

- Έρχονται τα 2 κολιέ, τα βλέπει η θεία και μας λέει ποιο θεωρεί το γνήσιο. Ακολουθούμε την κρίση της;

$$r(\pi, d) = \sum_{\theta} \pi(\theta) R(\theta, d) = \psi R(\theta=1, d) + (1-\psi) R(\theta=2, d), \quad d \in \mathcal{D}$$

d_1: Επιλέγω το αριστερό
d_2: επιλέγω το δεξί
d_3: πιστεύω τη θεία
d_4: δεν πιστεύω την θεία.

$$d^* = \frac{1}{3} d_2 + \frac{2}{3} d_3$$



Παράδειγμα : Το σμαραγδένιο κολιέ

$r(\pi,d) = \psi R_1 + (1-\psi)R_2 = c \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_2 = -\frac{\psi}{1-\psi}R_1 + \frac{c}{1-\psi} \quad c^* \quad \psi \neq 1}$ $*$

$y = \alpha x + \beta \qquad \alpha$ - κλίση

$d_2 \to d_3$: $\boxed{R_1 = -2R_2+1}$, $R_2 \in [0, 1/2]$

$r(\pi,d) = \psi R_1 + (1-\psi)R_2 = \psi(-2R_2+1) + (1-\psi)R_2 = -3\psi R_2 + \psi + R_2$, $R_2 \in [0,1]$

$$\partial_{R_2} r(\pi,d) = -3\psi + 1 = \begin{cases} >0 & \psi < 1/3 \to \text{η } d_2 \text{ είναι Bayes} \\ =0 & \psi = 1/3 \to d^* = \lambda d_2 + (1-\lambda) d_3,\ \lambda \in [0,1] \quad \text{είναι Bayes} \\ <0 & \psi > 1/3 \to \text{η } d_3 \text{ είναι Bayes} \end{cases}$$

$\boxed{R_2 = -\frac{1}{2}R_1 + 1/2}$ $*$

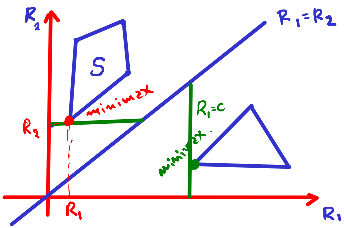
$-\frac{\psi}{1-\psi} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\psi = 1-\psi \Rightarrow \psi = 1/3$

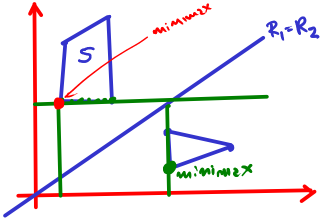
$-\frac{\psi}{1-\psi} > -\frac{1}{2} \Rightarrow \psi < 1/3$

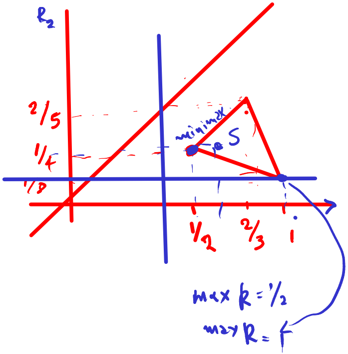
$-\frac{\psi}{1-\psi} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \psi > 1/3$ ✓

$2/3$	$1/3$
A	Δ
$1/4$	$3/4$
$1/3$	$2/3$

Εύρεση minimax συναρτήσεων αποφάσεως







$r_n(\pi_n,\theta) = \int \pi_n(\theta) R(\theta,\delta_n)\, d\theta$

Θεώρημα

$\{\delta_n\}$

Εάν δ_n είναι Bayes έχοντας την εκ των προτέρων κατανομή $\pi_n(\theta)$, και

$\updownarrow$ π_n

$$\lim_{n\to\infty} r(\pi_n,\delta_n) = C \in \mathbb{R}, \quad ✓$$

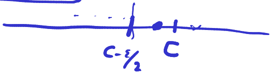
$$R(\theta,\delta_0) \le C, \quad \text{για κάθε } \theta \in \Theta, \quad ✓$$

τότε η δ_0 είναι minimax.

Αποδ. Έστω $\{\delta_n\}$ ικανοποιεί τα παραπάνω αλλά δ_0 δεν είναι minimax

$\exists\, \delta'$ η οποία έχει $\pi_n(\theta)$ εκ των προτέρων κατανομή τ.ω. $\sup_\theta R(\theta,\delta') < C \Rightarrow \boxed{R(\theta,\delta') \le C-\varepsilon \quad \forall\theta}$, $\varepsilon > 0$

$r(\pi_n,\delta_n) \to C \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\boxed{r(\pi_n,\delta_n) > C - \varepsilon/2}$



$r(\pi_n,\delta') = \int R(\theta,\delta')\pi_n(\theta)\, d\theta \le (C-\varepsilon)\int \pi_n(\theta)\, d\theta = C-\varepsilon$

άρα δ_n δεν είναι Bayes. Άτοπο.

Θεώρημα

Έστω ο διακριτός παραμετρικός χώρος $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_t\}$ και $\pi(\theta_j) > 0$, για κάθε $j = 1, \ldots, t$. Μια Bayes με εκ των προτέρων κατανομή την π είναι παραδεκτή.

<u>Απόδειξη</u> :

Έστω d είναι Bayes με εκ των προτέρων $\pi(\theta_j) > 0$ $j = 1, \ldots, t$

$\exists\, d'$ τ.ω. $R(\theta, d') \leq R(\theta, d)$ $\forall \theta \in \Theta$

$\exists$ τουλάχ. ένα $\theta_j \in \Theta$ τ.ω. $R(\theta_j, d') < R(\theta_j, d)$

$$\sum_{j=1}^{t} \pi_j R(\theta_j, d') < \sum_{j=1}^{t} \pi_j R(\theta_j, d)$$ δηλαδή $r(\pi, d') < r(\pi, d)$

άρα d δεν είναι Bayes. Άτοπο.

Για να είναι η d Bayes πρέπει $r(\pi, d) = \inf_{d' \in D} r(\pi, d')$

Θεώρημα

Εάν υπάρχει μοναδική Bayes συνάρτηση αποφάσεως τότε είναι παραδεκτή.

Αποδ.:

Έστω d να είναι η μοναδική Bayes για ένα π η οποία δεν είναι παραδεκτή

$\exists d'$ τ.ω $R(\theta, d') \leq R(\theta, d)$ $\forall \theta$ $\quad \exists \theta_0$ τ.ω $R(\theta_0, d') < R(\theta_0, d)$

$$r(\pi, d') = \int_\Theta \pi(\theta) R(\theta, d')\, d\theta \leq \int_\Theta \pi(\theta) R(\theta, d)\, d\theta = r(\pi, d)$$

άρα και η d' είναι Bayes συνάρτηση αποφάσεως. Άτοπο.

Παραδεκτότητα Bayes συναρτήσεων αποφάσεως

Θεώρημα

Έστω $\Theta \subseteq \mathbb{R}$, και $R(\theta, d)$ είναι συνεχής ως προς θ για κάθε $d \in \mathcal{D}$. Εάν επιπλέον για κάθε $\epsilon > 0$ και θ ισχύει $\pi((\theta - \epsilon, \theta + \epsilon)) > 0$ για κάποια εκ των προτέρων κατανομή π, τότε η Bayes με την π ως εκ των προτέρων κατανομή είναι παραδεκτή.

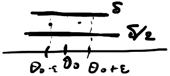
$(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0)$ ή $(\theta_0, \theta_0 + \varepsilon)$

Αποδ.

Έστω d Bayes αλλά όχι παραδεκτή. Τότε $\exists\, \theta_0$ τ.ω

$$R(\theta_0, d) - R(\theta_0, d') = \delta > 0 \qquad g(\theta) = R(\theta, d) - R(\theta, d')$$

$$g(\theta_0) = \delta > 0$$



Η g είναι συνεχής $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω $g(\theta) > \delta/2 \quad \forall \theta \in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$

$$r(\pi, d) - r(\pi, d') = \int_\Theta \{R(\theta, d) - R(\theta, d')\}\pi(\theta)\,d\theta \geq \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} g(\theta)\,\pi(\theta)\,d\theta > \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} \delta/2\; \pi(\theta)\,d\theta > 0$$

$$\int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} \delta/2\; \pi(\theta)\,d\theta = \delta/2 \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} \pi(\theta)\,d\theta$$

$r(\pi, d) > r(\pi, d')$ άρα d δεν είναι Bayes.