# MEM-262 Παραμετρική Στατιστική

**Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτη**

Διδάσκων : Κώστας Σμαραγδάκης

Διάλεξη 2 : 06-10-2020

# Συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών

Έστω συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $X$ τυχαία μεταβλητή.

Εάν για τη $g$ ισχύει

$$g^{-1}(A) \doteq \{x : g(x) \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{ για κάθε } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

τότε η $Y = g(X)$ είναι τυχαία μεταβλητή.

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in A\} = \{\omega : g(X(\omega)) \in A\} = \{\omega : X(\omega) \in \overbrace{g^{-1}(A)}^{A' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}\} \in \cancel{\mathcal{B}(\mathbb{R})}\ \mathcal{F}$$

$g(x) = |x|$ Αν $X$ τ.μ. τότε $|X|$ είναι τ.μ.

*Για κάθε τμηματικά συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η παραπάνω συνθήκη ικανοποιήται.*

## Αναμενόμενη τιμή τυχαίας μεταβλητής

### Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

$S = \{x_1, x_2, \dots\}$

$$\mathbb{E}(X) \doteq \sum_j x_j P(X = x_j) = \sum_{x \in S(X)} x p(x)$$

$\mathbb{E}\{g(X)\} = \sum_{x \in S(X)} g(x) p(x)$

### Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

$$\mathbb{E}(X) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$\rightarrow \mathbb{E}\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$

$\mathbb{E}\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy$

- $\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha \mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)$

# Διασπορά τυχαίας μεταβλητής

Έστω τυχαία μεταβλητή $X$ με πεπερασμένη αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}(X)$. Η παρακάτω ποσότητα καλείται **διασπορά** της $X$.

$$\mathrm{Var}(X) \doteq \mathbb{E}(\overbrace{(X - \mathbb{E}(X))^2}) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

- $\mathrm{Var}(\alpha X) = \alpha^2 \mathrm{Var}(X)$
- $\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 2\overbrace{\mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2)))}^{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}$

Παράδειγμα : $Y = -X$

$\mathbb{E}\{Y\} = -\mathbb{E}\{X\}$

$\mathrm{Var}\{Y\} = \mathrm{Var}\{X\}$.

# Ανισότητες Markov και Chebyshev

## Ανισότητα Markov

Έστω $X$ μη αρνητική τυχαία μεταβλητή και $c > 0$. Τότε ισχύει:

$$P(X \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{c}.$$

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_0^\infty x f(x)\,dx \geq \int_c^\infty \overset{x \geq c}{x} f(x)\,dx \geq c\int_c^\infty f(x)\,dx = cP(X \geq c) \quad \checkmark$$

## Ανισότητα Chebyshev

Έστω τυχαία μεταβλητή $X$ με πεπερασμένη $\mathbb{E}(X)$ πεπερασμένη και $c > 0$. Τότε ισχύει:

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq c) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{c^2}.$$

$X \to (X - E(X))^2$

$c \to c^2$

$$P(|X - E(X)| \geq c) = P\left((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq c^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}{c^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{c^2}$$

# Μια Εφαρμογή της ανισότητας Chebyshev

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq c) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{c^2}, \ c > 0$$

$$c = k \cdot \overbrace{\sqrt{Var(X)}}^{\text{Τυπική απόκλιση}} > 0, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

$$P\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k\sqrt{Var(X)}\right) \leq \frac{Var(X)}{k^2\, Var(X)} = \frac{1}{k^2}$$

$$P\left(|X - \mathbb{E}(X)| \leq k\sqrt{Var(X)}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$P\left(\mathbb{E}(X) - k\sqrt{Var(X)} \leq X \leq \mathbb{E}(X) + k\sqrt{Var(X)}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

### Bernoulli $X \sim \mathrm{Be}(p),\ p \in [0,1]$

$X=1$ ή $X=0$

$$p(k) = \begin{cases} p, & k=1 \\ 1-p, & k=0 \end{cases}$$

$\mathbb{E}(X) = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p.$

$$\mathbb{E}(X) = p, \quad \mathrm{Var}(X) = p(1-p)$$

### Παράδειγμα - Ρίψη νομίσματος

$p = \frac{1}{2}$ $\quad$ $k=1$ Κ $\quad$ $k=0$ Γ $\quad$ $X \sim Be(1/2)$

$P(1) = 1/2 \quad p(0) = 1 - \frac{1}{2} = 1/2$

$p = 1 \quad X \sim Be(1)$

Binomial.

**Διωνυμική** $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, $n \geq 1$, $p \in [0,1]$

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ 0 \leq k \leq n$$

n ριψεις
$k = 0, \dots, n$

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

**Παράδειγμα - Αριθμός κεφαλών σε $n$ ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος**

$p = 0.9$ 10 ριψεις 5 κεφαλες. K 10 φορες ή K.

$X \sim Bin(10, 0.9)$

$$P(5) = \binom{10}{5} 0.9^5 \, 0.1^5 \qquad \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!}$$

**Poisson** $X \sim \mathrm{Po}(\lambda),\ \lambda > 0$

$$p(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k \geq 0$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

**Παράδειγμα - Ο αριθμός των ψαριών που αλιεύει ένας ψαράς σε καθορισμένο χρονικό παράθυρο**

5 ψάρια / ώρα

$X \sim P_o(5)$

$P(k) = \frac{5^k e^{-5}}{k!}$

$P(0) = \frac{5^0 e^{-5}}{0!} = e^{-5} \simeq 0.007$

$P(7) = \frac{5^7 e^{-5}}{7!} \approx 0.1$

$P(X \geq 1) = 1 - p(0) \simeq 1 - 0.007 = 0.993$

$\sum_{k=1}^{3} p(k)$

## Γεωμετρική $X \sim \mathrm{Ge}(p),\ \ p \in (0,1]$

$$p(k) = (1-p)^{k-1}p,\ \ k \geq 1$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

## Παράδειγμα - Ο αριθμός των ρίψεων νομίσματος έως ότου να λάβουμε για πρώτη φορά κορώνα

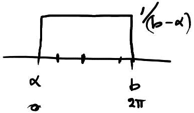
$p$ - πιθανότητα της κορώνας $\quad p=0.9 \quad X \sim Ge(0.9)$

$P(k) = 0.1^{k-1}\, 0.9 \quad P(2) = 0.1 \cdot 0.9 = 0.09$

$P(X \leq 3) = P(1) + P(2) + P(3)$

# Βασικές συνεχείς κατανομές

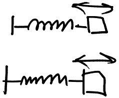
## Ομοιόμορφη $X \sim U[a, b], \ -\infty < a < b < \infty$




$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad -\infty < a < b < \infty$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

## Παράδειγμα - Διαφορά φάσης ανεξάρτητων ταλαντωτών με ίδια συχνότητας ταλάντωσης



$\varphi \sim U[0, 2\pi)$

## Βασικές συνεχείς κατανομές

T.A.

**Κανονική κατανομή** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

**Παράδειγμα - Ύψος των γυναικών μιας χώρας**

$\mu = 165\,cm \quad \sigma = 7 \qquad X \sim N(165, 7^2)$

**Γάμμα** $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta), \ \alpha > 0, \ \beta > 0$

$\alpha \in \mathbb{N} \quad \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad \text{όπου } \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

- **εκθετική** $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \doteq \mathrm{Gamma}(1, \lambda)$ $\quad \alpha = 1 \quad f(x) = \frac{5^1}{\Gamma(1)} x^0 e^{-5x} = 5e^{-5x}$
- **chi-square** $X \sim \mathcal{X}^2_\nu \doteq \mathrm{Gamma}(\nu/2, 1/2)$

$\alpha$

**Παράδειγμα - Χρόνος που απαιτείται για αλίευση ενός αριθμού ψαριών (σύνδεση με Poisson)**

$\lambda = 5$ ψάρια / ώρα $\quad x = 0.1 \quad 0.1 \cdot 60 \text{ min} = 6 \text{ min}$

Ποια η πιθανοτητα να χρειαστει το πολυ 6 min για το πρωτο ψαρι

$P(X \leq 0.1) = \int_0^{0.1} 5e^{-5x} dx$

# Βασικές συνεχείς κατανομές

**Βήτα** $X \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta), \ \alpha > 0, \ \beta > 0$

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad \text{όπου } B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

**Παράδειγμα - Ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων μιας μονάδας παραγωγής.**

$\frac{2}{7}$ ελαττωματικά

$\alpha = 2$

$\beta = 5$

ποσοστό

$X \sim \mathrm{Beta}(2,5)$

$$P\left(X \geq \tfrac{1}{2}\right) = \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx$$

## Παράδειγμα μετασχηματισμού τυχαίας μεταβλητής

Έστω τυχαία μεταβλητή $X \sim U[0,1]$. Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την $Y = \sqrt{X}$.