MEM-262 Παραμετρική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτη

Διδάσκων : Κώστας Σμαραγδάκης

Διάλεξη 15 : 19-11-2020

Οικογένεια εκθετικών κατανομών

Έστω $\mathbf{X}$ τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί κατανομή της εκθετικής οικογένειας. Δηλαδή υπάρχουν φυσικές παράμετροι $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k)^T$ και οι αντίστοιχες φυσικές στατιστικές $\mathbf{s}(\mathbf{X}) = (s_1(\mathbf{X}), s_2(\mathbf{X}), \ldots, s_k(\mathbf{X}))^T$ έτσι ώστε η συνάρτηση πυκνότητας (ή μάζας) πιθανότητας να δίνεται στη μορφή:

$$f(\mathbf{x}; \phi) = h(\mathbf{x}) \exp(\mathbf{s}(\mathbf{x})^T \phi - K(\phi))$$

Θεωρούμε την διαμέριση για τη φυσική στατιστική $\mathbf{s}(\mathbf{X}) = (\mathbf{t}(\mathbf{X}), \mathbf{u}(\mathbf{X}))$, όπου $\mathbf{t}(\mathbf{X}) = (t_1(\mathbf{X}), \ldots, t_m(\mathbf{X}))^T$ και $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = (u_1(\mathbf{X}), \ldots, u_{k-m}(\mathbf{X}))^T$. Επιπλέον θεωρούμε αντίστοιχη διαμέριση για τις φυσικές παραμέτρους $\phi = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi})$.
Τότε μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στην μορφή:

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}) = h(\mathbf{x}) \exp(\mathbf{t}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\xi} - K(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}))$$

Οικογένεια εκθετικών κατανομών

Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{U} = \mathbf{u}(\mathbf{X})$ και $\mathbf{T} = \mathbf{t}(\mathbf{X})$ τότε μπορούμε να φέρουμε την συνάρτηση πυκνότητας (ή μάζας) πιθανότητας στη μορφή:

$$f(\mathbf{t}, \mathbf{u}; \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}) = h(\mathbf{t}, \mathbf{u}) \exp(\mathbf{t}^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{u}^T \boldsymbol{\xi} - K(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}))$$

Περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας (ή μάζας) πιθανότητας

$$f_T(\mathbf{t}; \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}) = h_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{t}) \exp(\mathbf{t}^T \boldsymbol{\tau} - K_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\tau}))$$

$$f_U(\mathbf{u}; \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}) = h_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}) \exp(\mathbf{u}^T \boldsymbol{\xi} - K_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}))$$

Δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας (ή μάζας) πιθανότητας

$$f_{T|U}(\mathbf{t}|\mathbf{u}; \boldsymbol{\tau}) = h_{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) \exp(\mathbf{t}^T \boldsymbol{\tau} - K_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\tau})) \quad \text{(ανεξάρτητη του } \boldsymbol{\xi} \text{ !!)}$$

$$f_{U|T}(\mathbf{u}|\mathbf{t}; \boldsymbol{\xi}) = h_{\mathbf{t}}(\mathbf{u}) \exp(\mathbf{u}^T \boldsymbol{\xi} - K_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\xi})) \quad \text{(ανεξάρτητη του } \boldsymbol{\tau} \text{ !!)}$$

Οικογένεια εκθετικών κατανομών

$$f(t \mid u; \tau, \xi) = \frac{f(t,u;\tau,\xi)}{f(u;\tau,\xi)} = \frac{h(t,u)\exp\{t^T\tau + u^T\xi - k(\tau,\xi)\}}{\int_{\mathcal{T}} h(t,u)\exp\{t^T\tau + \underline{u^T\xi} - \underline{k(\tau,\xi)}\}\,dt} =$$

$$= \frac{h(t,u)\exp\{u^T\xi - k(\tau,\xi)\}\exp\{t^T\tau\}}{\exp\{u^T\xi - k(\tau,\xi)\}\int_{\mathcal{T}} h(t,u)\exp\{t^T\tau\}\,dt} = \frac{h(t,u)\exp\{t^T\tau\}}{\int_{\mathcal{T}} h(t,u)\exp\{t^T\tau\}\,dt}.$$

αποτέλεσμα ανεξάρτητο του ξ

Παράδειγμα : $X_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda_1), X_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda_2)$ **ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.**

Θα δούμε τι κατανομή ακολουθεί η δεσμευμένη τυχαία μεταβλητή $X_1|(X_1 + X_2)$.

$$f(x_1;\lambda_1) = \frac{\lambda_1^{x_1} e^{-\lambda_1}}{x_1!}, \quad f(x_2;\lambda_2) = \frac{\lambda_2^{x_2} e^{-\lambda_2}}{x_2!}$$

$$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2)^T, \quad \underset{\sim}{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^T$$

$$f(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\lambda}) = \frac{\lambda_1^{x_1}\lambda_2^{x_2}\exp\{-(\lambda_1+\lambda_2)\}}{x_1!\,x_2!} = \frac{1}{x_1!\,x_2!}\exp\{\log\lambda_1^{x_1} + \log\lambda_2^{x_2} - (\lambda_1+\lambda_2)\} =$$

$$= \frac{1}{x_1!\,x_2!}\exp\{x_1\log\lambda_1 + x_2\log\lambda_2 - (\lambda_1+\lambda_2)\} =$$

$$x_1\log\lambda_1 - x_1\log\lambda_2 + x_1\log\lambda_2$$

$$= \frac{1}{x_1!\,x_2!}\exp\left\{x_1\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) + (x_1+x_2)\log\lambda_2 - (\lambda_1+\lambda_2)\right\}$$

$$h(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{x_1!\,x_2!} \qquad \underset{\sim}{S}(\underset{\sim}{x}) = (x_1, x_1+x_2)^T \qquad \underset{\sim}{\phi} = \left(\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right), \log\lambda_2\right)$$

Εύρεση της $K(\underset{\sim}{\phi})$

$$\log\lambda_2 = \phi_2 \Leftrightarrow \lambda_2 = e^{\phi_2}$$

$$\phi_1 = \log\lambda_1 - \log\lambda_2$$

$$\phi_1 + \phi_2 = \log\lambda_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = e^{\phi_1}e^{\phi_2}$$

$$\boxed{K(\lambda_1,\lambda_2) \to K(\underset{\sim}{\phi}) = e^{\phi_2}(1+e^{\phi_1}).}$$

Οικογένεια εκθετικών κατανομών

$$\underset{\sim}{S}(\underset{\sim}{X}) = (t(\underset{\sim}{x}), u(\underset{\sim}{x}))$$

$$\underset{\sim}{\phi} = (\tau, \xi)$$

$$t(\underset{\sim}{x}) = x_1$$

$$u(\underset{\sim}{x}) = x_1 + x_2 \qquad T = t(\underset{\sim}{X}), \quad U = u(\underset{\sim}{X})$$

$$\tau = \log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right), \quad \xi = \log \lambda_2$$

$$f_{TU}(t,u) = h(t,u) \exp\{t\tau + u\xi - k(\tau,\xi)\} \qquad k(\tau,\xi) = e^{\xi}(1+e^{\tau})$$

σχόλιο

$$x_2 = u - x_1 = u - t$$

άρα $h(\underset{\sim}{x}) \longleftrightarrow h(t,u) = \dfrac{1}{t!(u-t)!}$

$$f(t/u;\tau) = \frac{f(t,u;\tau,\xi)}{f(u;\tau,\xi)}, \qquad f(u;\tau,\xi) = \sum_{t=0}^{u} f(t,u;\tau,\xi) = \exp\{u\xi - k(\tau,\xi)\} \sum_{t=0}^{u} \frac{1}{t!(u-t)!} e^{t\tau}.$$

$t = 0, 1, \ldots, u$

$$\binom{u}{t} = \frac{u!}{t!(u-t)!}$$

$$\sum_{t=0}^{u} \frac{1}{t!(u-t)!}(e^{\tau})^t = \frac{1}{u!} \sum_{t=0}^{u} \binom{u}{t} (e^{\tau})^t = \frac{1}{u!}(1+e^{\tau})^u \Rightarrow$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$\Downarrow$$

$$f(u;\tau,\xi) = \underbrace{\frac{1}{u!}(1+e^{\tau})^u}_{h_\tau(u)} \cdot \exp\{u\xi - \underbrace{k(\tau,\xi)}_{k_\tau(\xi)}\}$$

Οικογένεια εκθετικών κατανομών

$$f(t\mid u;\tau)=\frac{\frac{1}{t!(u-t)!}\exp\{t\tau+u\xi-(1+e^{\tau})e^{\xi}\}}{\frac{1}{u!}(1+e^{\tau})^{u}\exp\{u\xi-(1+e^{\tau})e^{\xi}\}}=\frac{u!}{t!(u-t)!}e^{\tau t}=\binom{u}{t}(e^{\tau})^{t}\left(\frac{1}{1+e^{\tau}}\right)^{u}=$$

$$=\binom{u}{t}(e^{\tau})^{t}\left(\frac{1}{1+e^{\tau}}\right)^{u-t}\left(\frac{1}{1+e^{\tau}}\right)^{t}=\binom{u}{t}\left(\frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}}\right)^{t}\left(\frac{1}{1+e^{\tau}}\right)^{u-t}=\binom{u}{t}p^{t}(1-p)^{u-t}$$

$$p=\frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}} \quad \text{τότε} \quad 1-p=\frac{1+\cancel{e^{\tau}}-\cancel{e^{\tau}}}{1+e^{\tau}}=\frac{1}{1+e^{\tau}}$$

$$T/U\sim Bin\left(u,\frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}}\right)$$

$$U=v=20 \qquad \tau=\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)=\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$X_1\mid(X_1+X_2)\sim Bin\left(20,\frac{1/2}{1+1/2}\right)=Bin\left(20,\frac{1}{3}\right).$$