ΜΕΜ-262 Παραμετρική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτη

Διδάσκων : Κώστας Σμαραγδάκης

Διάλεξη 14 : 17-11-2020

Ορισμός

Λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή $\mathbf{X}$ ακολουθεί κατανομή που ανήκει στην **οικογένεια εκθετικών κατανομών** εάν υπάρχει ϕ σε ένα παραμετρικό χώρο $\Phi \subseteq \mathbb{R}^k$, για το οποίο η συνάρτηση πυκνότητας (ή μάζας) πιθανότητας γράφεται στη μορφή:

$$f(\mathbf{x};\phi) = h(\mathbf{x}) \exp\{\mathbf{s}(\mathbf{x})^T\phi - K(\phi)\}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \ \phi \in \Phi.$$

- Οι συνιστώσες του ϕ καλούνται **φυσικές παράμετροι**.
$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)^T$$
- Ο **φυσικός παραμετρικός χώρος** ορίζεται ως:
$$\Phi = \left\{\phi : \int_{\mathcal{X}} h(\mathbf{x}) \exp(\mathbf{s}(\mathbf{x})^T\phi) d\mathbf{x} < \infty\right\}$$
- Οι συνιστώσες της συνάρτησης $\mathbf{s}$ καλούνται **φυσικές στατιστικές**.
$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = (s_1(\mathbf{x}), s_2(\mathbf{x}), \dots, s_k(\mathbf{x}))^T$$

- Η διάσταση k των ϕ και $\mathbf{s}(\mathbf{X})$ μπορεί να μειωθεί εφόσον οι συνιστώσες του ϕ ή του $\mathbf{s}$ ικανοποιούν κάποιο γραμμικό περιορισμό.
- Η αναπαράσταση για το ελάχιστο δυνατό k καλείται **ελάχιστη**.
- Η οικογένεια κατανομών όπως ορίστηκε λέμε ότι είναι μια (k, k) εκθετική οικογένεια κατανομών.

Οικογένεια εκθετικών κατανομών

Παράδειγμα : $X \sim \mathrm{Be}(p)$

εκθ. οικογ. $f(x;\phi) = h(x)\exp\{s(\underset{\sim}{x})^T\phi - k(\phi)\}$

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0,1\}, \quad p \in [0,1]$$

$p^x = e^{\ln p^x} = e^{x\ln p}$, $(1-p)^{1-x} = e^{\ln(1-p)^{1-x}} = e^{(1-x)\ln(1-p)}$

$p^x(1-p)^{1-x} = \exp\{x\ln p + \ln(1-p) - x\ln(1-p)\} =$

$= \exp\{x[\ln p - \ln(1-p)] + \ln(1-p)\} =$

$= \exp\{x\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + \underset{-\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)}{\underset{\parallel}{\ln(1-p)}}\} =$

$= \exp\{x\phi - \ln(1+e^\phi)\}$

θέτω $\phi = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$

$e^\phi = \frac{p}{1-p} \Leftrightarrow e^\phi + 1 = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{1-p} =$

$= \frac{1}{1-p}$

Άρα $h(x) = 1$, $S(x) = x$, $\phi(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$, $k(\phi) = \ln(1+e^\phi)$

Παράδειγμα : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\qquad f(x;\phi) = h(x)\exp\{s(x)^T\phi - k(\phi)\}$

$\frac{1}{\sigma} = e^{\ln\frac{1}{\sigma}} = e^{-\ln\sigma}$

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \; x \in \mathbb{R}, \; \mu \in \mathbb{R}, \; \sigma^2 > 0$$

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\ln\sigma - \frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{s(x)^T\phi - \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \ln\sigma\right)\right\}$$

ορίζω $s(x) = (x, x^2)^T$ $\qquad \phi = \left(\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}\right)^T$ $\qquad K=2$ $\qquad h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\frac{\mu^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2\sigma^2 = -\frac{1}{4}\phi_1\frac{1}{-\frac{1}{2\sigma^2}} = -\frac{1}{4}\phi_1/\phi_2$$

$$\ln\sigma = \frac{1}{2}2\ln\sigma = \frac{1}{2}\ln\sigma^2 = -1/2\,\ln\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left[-2\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)\right] = -\frac{1}{2}\ln(-2\phi_2)$$

$$K(\phi) = -\frac{1}{4}\frac{\phi_1}{\phi_2} - \ln(-2\phi_2).$$

Μέσες τιμές, διασπορές και συνδιασπορές

$$\mathbb{E}_\phi(s_j(\mathbf{X})) = \frac{\partial K(\phi)}{\partial \phi_j}, \quad \mathrm{Var}_\phi(s_j(\mathbf{X})) = \frac{\partial^2 K(\phi)}{\partial \phi_j^2}, \quad \mathrm{Cov}_\phi(s_i(\mathbf{X}), s_j(\mathbf{X})) = \frac{\partial^2 K(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j}$$

$$\mathrm{Var}_\phi(s_j(\mathbf{X})) = \mathbb{E}\left((S_j(x) - \mathbb{E}(S_j(x))^2\right)$$

$$\mathrm{Cov}_\phi(s_i(\mathbf{X}), s_j(\mathbf{X})) = \mathbb{E}\left((S_i(x) - \mathbb{E}(S_i(x))(S_j(x) - \mathbb{E}(S_j(x))\right)$$

$$f(x;\phi) = h(x)\exp\{s(x)^T\phi - k(\phi)\}$$

$$1 = \int_{\mathcal{X}} f(x;\phi)\,dx = e^{-k(\phi)}\int_{\mathcal{X}} h(x)\exp\{s(x)^T\phi\}\,dx \Rightarrow e^{k(\phi)} = \int_{\mathcal{X}} h(x)\exp\{s(x)^T\phi\}\,dx \Rightarrow k(\phi) = \ln \underbrace{\int_{\mathcal{X}} h(x)\exp\{s(x)^T\phi\}\,dx}_{Q(\phi)}$$

$$\frac{\partial k(\phi)}{\partial \phi_j} = \frac{1}{Q(\phi)}\frac{\partial Q(\phi)}{\partial \phi_j} = \frac{1}{Q(\phi)}\int_{\mathcal{X}} h(x)\exp\{s(x)^T\phi\}\,s_j(x)\,dx = \frac{\int_{\mathcal{X}} h(x)\exp\{s^T\phi\}\,s_j(x)\,dx}{\int_{\mathcal{X}} h(x)\exp\{s(x)^T\phi\}\,dx} =$$

$$= \frac{\int s_j(x)\,f(x;\phi)\,dx}{\int_{\mathcal{X}} \underbrace{h(x)\exp\{s(x)^T\phi - k(\phi)\}}_{f(x;\phi)}\,dx} = \mathbb{E}_\phi\{S_j(X)\}.$$

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $i.i.d$ με X_1 να ακολουθεί κατανομή που ανήκει στην οικογένεια των εκθετικών κατανομών. Τότε και η $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ ακολουθεί κατανομή από την οικογένεια των εκθετικών κατανομών.

$$f(x_j;\phi) = h(x_j)\exp\{s(x_j)^T\phi - k(\phi)\} \quad , j=1,\ldots,n$$

$$f(\underset{\sim}{x};\phi) = \prod_{j=1}^{n}\left\{h(x_j)\exp\{s(x_j)^T\phi - k(\phi)\}\right\} =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n} h(x_j)\right)\cdot \exp\left\{\left[\sum_{j=1}^{n} s(x_j)\right]^T\phi - n\,k(\phi)\right\}$$

$$h^*(\underset{\sim}{x})\cdot\exp\{s^*(\underset{\sim}{x})^T\phi - k^*(\phi)\}$$

όπου $h^*(\underset{\sim}{x}) = \prod_{j=1}^{n} h(x_j)$ $\quad s^*(\underset{\sim}{x}) = (s^*_1(\underset{\sim}{x}), \ldots, s^*_k(\underset{\sim}{x}))$ $\quad s^*_i = \sum_{j=1}^{n} s_i(x_j)$, $i=1,\ldots,k$.

$$k^*(\phi) = n\,k(\phi).$$

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad , \quad k << n$$

- Μερικές φορές η τιμές του ϕ περιορίζονται σε ένα d - διάστατο υπόχωρο του Φ, όπου $d < k$.
- Ο περιορισμός εφαρμόζεται εκφράζοντας το $\boldsymbol{\phi}$ ως συνάρτηση του $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$, δηλαδή $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\theta})$.
- Τότε έχουμε την παρακάτω μορφή για την συνάρτηση πυκνότητας (ή μάζας) πιθανότητας:

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = h(\boldsymbol{x}) \exp\{\mathbf{s}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\theta}) - K(\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\theta}))\}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d.$$

$d<k$

- Η οικογένεια κατανομών όπως ορίστηκε από τη $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$, καλείται ως (k, d) οικογένεια εκθετικών κατανομών ή καμπυλωμένη οικογένεια εκθετικών κατανομών.

Καμπυλωμένες οικογένειες εκθετικών κατανομών

Παράδειγμα : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \mu^2), \mu > 0$

Από προηγούμενο παράδειγμα για $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\underset{\sim}{\phi} = \left(\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}\right)^T$$

Στη περίπτωσή μας

$$\underset{\sim}{\phi} = \left(\frac{\mu}{\mu^2}, -\frac{1}{2\mu^2}\right)^T = \left(\frac{1}{\mu}, -\frac{1}{2\mu^2}\right)^T \in \mathbb{R}^2 \qquad \theta = \mu \in \mathbb{R}^+$$

$$\underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{\phi}(\mu)$$