ΜΕΜ-262 Παραμετρική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτη

Διδάσκων : Κώστας Σμαραγδάκης

Διάλεξη 13 : 12-11-2020

Αντίστροφη Γάμμα κατανομή

$X \sim \mathrm{InvGamma}(\alpha, \beta), \quad \alpha > 0, \;\; \beta > 0$

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/x}, \quad x > 0$$

- Εάν $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$ τότε $1/X \sim \mathrm{InvGamma}(\alpha, \beta)^{-1}$
- Μας είναι σημαντική γιατί αποτελεί συζυγή εκ των προτέρων κατανομή για την $\mathcal{N}(\mu, \theta)$ όπου το μ είναι γνωστό.
- Συγκεκριμένα εάν $X_1, X_2, \ldots, X_n,\;$ *i.i.d* με $X_j|\theta \sim \mathcal{N}(\mu, \theta)$ και $\theta \sim \mathrm{InvGamma}(\alpha, \beta)$ τότε

$$\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x} \sim \mathrm{InvGamma}(\alpha + n/2, \beta + \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2/2)$$

.

Gibbs Sampler

Παρατηρητας $x_1, x_2, \ldots, x_n$ της X

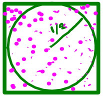
Εφαρμογή : $X|\theta_1, \theta_2 \sim \mathcal{N}(\theta_1, \theta_2)$ **με** $\theta_1 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ **και** $\theta_2 \sim \mathrm{InvGamma}(\alpha, \beta)$

- Θέλουμε να προσδιορίσουμε την εκ των υστέρων κατανομή του $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^T$ έχοντας n παρατηρήσεις της X.
- Δηλαδή θέλουμε να προσδιορίσουμε την $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \pi(\theta_1, \theta_2|\mathbf{x})$.
- Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε για παράδειγμα τη πιθανότητα $P(\theta_1 \in (-1, 1), \theta_2 \in (1, 2)|\mathbf{x})$ ως:

$$P(\theta_1 \in (-1, 1), \theta_2 \in (1, 2)|\mathbf{x}) = \int_1^2 \int_{-1}^1 \pi(\theta_1, \theta_2|\mathbf{x}) d\theta_1 d\theta_2$$

Γενική περίπτωση : $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d)^T \in \mathbb{R}^d$

- Όμως δεν είναι απλός ο προσδιορισμός της $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})$ και στη πραγματικότητα τις περισσότερες φορές δεν γίνεται !!



$E = 1m^2$

$E_K = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

$B \quad B_K$

$\frac{\pi}{4} \approx \frac{B_K}{B} \Leftrightarrow \pi \approx 4\frac{B_K}{B}$

Εφαρμογή : $X|\theta_1, \theta_2 \sim \mathcal{N}(\theta_1, \theta_2)$ **με** $\theta_1 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ **και** $\theta_2 \sim \text{InvGamma}(\alpha, \beta)$

- Γνωρίζουμε το $\pi(\theta_1|\mathbf{x})$ εάν θ_2 είναι γνωστό. $\left.\begin{matrix} x|\theta_1 \sim N(\theta_1, \sigma^2) \\ \theta_1 \sim N(\mu_0, \sigma_0^2) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{x} \theta_1|x \sim N(\mu_0', (\sigma_0')^2)$
- Γνωρίζουμε επίσης το $\pi(\theta_2|\mathbf{x})$ εάν θ_1 είναι γνωστό. $\left.\begin{matrix} x|\theta_2 \sim N(\mu, \theta_2) \\ \theta_2 \sim \text{InvGamma}(\alpha, \beta) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{x} \theta_2|x \sim \text{InvGamma}(\alpha', \beta')$
- Δεν γνωρίζουμε όμως την $\pi(\theta_1, \theta_2|\mathbf{x})$ που μας ενδιαφέρει πραγματικά.
- Αντί να εκτιμήσουμε την $\pi(\theta_1, \theta_2|\mathbf{x})$ το οποίο προϋποθέτει υπολογισμό της σταθεράς κανονικοποίησης, θα δημιουργήσουμε ένα μεγάλο δείγμα από αυτήν (πχ 10000 σημεία).
- Από αυτά τα σημεία θα μπορούμε υπολογιστικά να προσεγγίσουμε τη τιμή της πιθανότητας όποιου ενδεχόμενο μας ενδιαφέρει.

Θέλουμε να πράξουμε Q $=1000$ παρατηρήσεις από την απο κοινού εκ των υστέρων κατανομή των θ_1, θ_2.

1. Επιλέγουμε τυχαίες τιμές για τις δύο παραμέτρους $\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}$.
2. Θέτουμε $j = 1$.
3. Παράγουμε μια τυχαία τιμή $\theta_1^{(j)}$ από τη $\pi(\theta_1|\theta_2^{(j-1)}, \mathbf{x})$.
4. Παράγουμε μια τυχαία τιμή $\theta_2^{(j)}$ από τη $\pi(\theta_2|\theta_1^{(j)}, \mathbf{x})$.
5. Εάν το $j > k$ $=100$ αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}^{(j)} = (\theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)})^T$.
6. Εάν $j < Q + k$ αυξάνουμε το j κατά μία μονάδα και επιστρέφουμε στο βήμα 3.

$j=2$

$j=1$

$\theta_1^{(1)}$

$\theta_2^{(1)}$ $\rightarrow (\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)})$

$j=2$

$\theta_1^{(2)}$ $\pi(\theta_1|\theta_2^{(1)}, x)$

$\theta_2^{(2)}$ $\pi(\theta_2|\theta_1^{(2)}, x)$

Ο ίδιος αλγόριθμος ακολουθείται για $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d)^T \in \mathbb{R}^d$

- Παράγουμε τυχαία τιμή $\theta_k^{(j)}$ από την $\pi(\theta_k|\theta_1^{(j)}, \ldots, \theta_{k-1}^{(j)}, \theta_{k+1}^{(j-1)}, \ldots, \theta_d^{(j-1)}, \mathbf{x})$

$\theta^{(j)} = (\theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \ldots, \theta_d^{(j)})^T \quad , j > k$

Gibbs Sampler

Εφαρμογή : $X|\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{N}(\theta_1, \theta_2)$ **με** $\theta_1 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ **και** $\theta_2 \sim \text{InvGamma}(\alpha, \beta)$

Πιθανοφάνεια	εκ των προτέρων	εκ των υστέρων
$\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$	$\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$	$\mathcal{N}\left((\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2})^{-1} (\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{n\bar{x}_n}{\sigma^2}), (\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2})^{-1} \right)$
$\mathcal{N}(\mu, \theta)$	$\text{InvGamma}(\alpha, \beta)$	$\text{InvGamma}(\alpha + n/2, \beta + \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2/2)$

$f(x,y) = f(x|y)f(y)$

$$\pi(\theta_1, \theta_2 | \underset{\sim}{x}) = \pi(\theta_1 | \theta_2, \underset{\sim}{x}) \pi(\theta_2 | \underset{\sim}{x}) = \frac{\pi(\theta_1 | \theta_2, \underset{\sim}{x})}{\frac{1}{\pi(\theta_2 | \underset{\sim}{x})}} = \frac{\pi(\theta_1 | \theta_2, x)}{\int_{\mathbb{R}} \frac{\pi(\theta_1 | x)}{\pi(\theta_2 | x)} d\theta_1} = \frac{\pi(\theta_1 | \theta_2, x)}{\int_{\mathbb{R}} \frac{\pi(\theta_1 | \theta_2, x)}{\pi(\theta_2 | \theta_1, x)} d\theta_1}$$

$$\pi(\theta_1, \theta_2 | \underset{\sim}{x}) = \pi(\theta_2 | \theta_1, \underset{\sim}{x}) \pi(\theta_1 | \underset{\sim}{x})$$

$$= \frac{\pi(\theta_2 | \theta_1, x)}{\int_{\mathbb{R}} \frac{\pi(\theta_2 | \theta_1, x)}{\pi(\theta_1 | \theta_2, x)} d\theta_2}$$