ΜΕΜ-262 Παραμετρική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτη

Διδάσκων : Κώστας Σμαραγδάκης

Διάλεξη 12 : 10-11-2020

Η κατανομή χ_p^2

Όπως έχουμε δει η κατανομή χ_p^2 είναι μια ειδική περίπτωση της Γάμμα κατανομής.
Συγκεκριμένα $(\mathrm{Gamma}(p/2, 1/2))$.
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την χ_p^2 δίνεται ως:

$$f(\mathbf{x}; p) = \frac{1}{2^{p/2}\Gamma(p/2)} x^{p/2} e^{-x/2}$$

Εάν $X_1, X_2, \ldots, X_p$ $i.i.d$ με $X_j \sim \mathcal{N}(0,1)$ και $X = \sum_{j=1}^{p} X_j^2$ τότε $X \sim \chi_p^2$.

$$\mathbb{E}(X) = p, \ \mathrm{Var}(X) = 2p$$

Άσκηση : Εάν $X \in \mathcal{N}(0,1)$ δείξτε ότι $X^2 \sim \chi_1^2$

Εύρεση της $\mathbb{E}(1/X)$, όπου $X \sim \chi^2_p$

Εκτιμήτρια James-Stein στην ειδική περίπτωση όπου $\theta = 0$

- Όταν οι παράμετροι της εκ των προτέρων κατανομής δεν είναι γνωστές μπορούμε να τις προσεγγίσουμε από τις παρατηρήσεις.
- Η εκ των υστέρων κατανομή δίδεται χρησιμοποιώντας αυτή τη προσέγγιση.
- Είναι ξεκάθαρο ότι δεν λαμβάνουμε την κλασσική εκ των υστέρων κατανομή.
- **Μέθοδοι αυτής της μορφής καλούνται εμπειρικές Bayes**.

Θα ξεκινήσουμε με τ^2 γνωστό.

Εφαρμογή : $X_j|\theta_j \sim \mathcal{N}(\theta_j, 1)$ **ανεξάρτητες**, $\theta_j \sim N(0, \tau^2)$ $i.i.d$, τ^2 **γνωστό**.

- Εκτιμήτρια Bayes για τετραγωνική συνάρτηση απώλειας:

$$\delta_\tau(X_j) = \frac{\tau^2}{\tau^2 + 1} X_j$$

$x_j \mid \theta_j \sim N(\theta_j, 1)$ $\theta_j \sim N(0, \tau^2)$ τ^2 γνωστό

likehood $N(\theta, \sigma^2)$ prior $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ $\longrightarrow$ posterior $N\left(\left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}\right)^{-1} \left(\frac{\mu_0}{\sigma^2} + \frac{n\bar{X}_n}{\sigma^2}\right), \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}\right)^{-1} \right)$

$$\theta_j \mid x_j \sim N\left(\left(\frac{1}{\tau^2} + 1\right)^{-1} x_j, \left(\frac{1}{\tau^2} + 1\right)^{-1} \right) \qquad \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + 1} = \frac{\tau^2}{\tau^2 + 1}$$

$$\theta_j \mid x_j \sim N\left(\frac{\tau^2}{\tau^2+1} x_j, \frac{\tau^2}{\tau^2+1} \right)$$

για τετραγωνική απώλεια $\boxed{\delta_\tau(x_j) = \frac{\tau^2}{\tau^2+1} X_j}$

παράδειγμα $x_j = 3$ $\tau^2 = 1$

τότε $\hat{\theta} = \delta_1(3) = \frac{1}{2} 3 = 1.5$

Εύρεση της περιθωριακής κατανομής της X_j

$X_j \sim N(0, \tau^2+1)$

$$f(x_j) = \int_{\Theta_j} f(x_j, \theta_j)\, d\theta_j = \int_{\Theta_j} f(x_j; \theta_j)\pi(\theta_j)\, d\theta_j$$

$$f(x_j, \theta_j) = \underbrace{f(x_j|\theta_j)}_{f(x_j;\theta_j)}\pi(\theta_j)$$

$$f(x_j;\theta_j) = \frac{1}{2^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x_j-\theta_j)^2}$$

$$\pi(\theta_j) = \frac{1}{2^{1/2}\tau} e^{-\frac{\theta_j^2}{2\tau^2}}$$

άρα

$$\boxed{f(x_j;\theta_j)\pi(\theta_j) = \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{1}{2}\left[(x_j-\theta_j)^2 + \theta_j^2/\tau^2\right]}}$$

$$(x_j-\theta_j)^2 + \frac{\theta_j^2}{\tau^2} = x_j^2 + \theta_j^2 - 2x_j\theta_j + \frac{\theta_j^2}{\tau^2} = x_j^2 - 2x_j\theta_j + \theta_j^2\left(1+\frac{1}{\tau^2}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\tau^2}\right)\left[\theta_j^2 - 2\theta_j\frac{x_j}{1+\frac{1}{\tau^2}} + \frac{x_j^2}{\left(1+\frac{1}{\tau^2}\right)^2}\left(1+\frac{1}{\tau^2}\right)\right] =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\tau^2}\right)\left(\theta_j - \frac{x_j}{1+\frac{1}{\tau^2}}\right)^2 + \frac{x_j^2}{\left(1+\frac{1}{\tau^2}\right)}\frac{1}{\tau^2} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\tau^2}\right)\left(\theta_j - \frac{\tau^2}{\tau^2+1}x_j\right)^2 + \frac{x_j^2}{\tau^2+1}$$

Τελικά $f(x) \propto e^{-\frac{x_j^2}{1+\tau^2}}$

$X \sim N(0, \tau^2+1)$

Εκτίμηση της παραμέτρου τ^2 από τα X_j , $j=1,\dots,p$

$X_j \sim N(0, \tau^2+1)$ $\qquad$ $\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_p)^T$

$Y_j = \dfrac{X_j}{\sqrt{\tau^2+1}} \sim N(0,1)$ $\qquad$ $\underset{\sim}{Y} = (Y_1,\dots,Y_p)^T$

$\|Y\|_2^2 = \sum_{j=1}^{p} Y_j^2 \sim \chi_p^2$ $\qquad$ $\|Y\|_2^2 = \dfrac{\|X\|_2^2}{\tau^2+1} \sim \chi_p^2$

$$E\left(1 - \frac{p-2}{\|X\|_2^2}\right) = 1 - (p-2)\,E\left(\frac{1}{\|X\|_2^2}\cdot\frac{\tau^2+1}{\tau^2+1}\right) = 1 - \cancel{(p-2)}\frac{1}{\tau^2+1}\frac{1}{\cancel{p-2}} = \frac{\tau^2}{\tau^2+1}$$

$$\widehat{\left(\frac{\tau^2}{\tau^2+1}\right)} = 1 - \frac{p-2}{\|X\|_2^2}$$

$$\underset{\sim}{\theta} \mid \underset{\sim}{X} \sim N\left(\left(1 - \frac{p-2}{\|\underset{\sim}{X}\|_2^2}\right)\underset{\sim}{X},\ \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|_2^2}\right)\right)$$

Εάν $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$ τότε $d_{p-2}(\underset{\sim}{X}) = \left(1 - \dfrac{p-2}{\|X\|_2^2}\right)\underset{\sim}{X}$

Εμπειρικές Bayes