MEM-262 Παραμετρική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτη

Διδάσκων : Κώστας Σμαραγδάκης

Διάλεξη 11 : 05-11-2020

$$H_0 : \theta \in \Theta_0, \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0$$

$$\mathcal{A} = \{\overset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{0}}, \overset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{1}}\}$$

$L(\theta, \overset{0 \vee 1}{d})$

$0 \leftrightarrow H_0$

$1 \leftrightarrow H_1$

$L(\theta, \alpha = 1)$

$$L(\theta, 0) = \begin{cases} 0, & \text{εάν } \theta \in \Theta_0 \\ 1, & \text{εάν } \theta \in \Theta_1 \end{cases}, \qquad L(\theta, 1) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } \theta \in \Theta_0 \\ 0, & \text{εάν } \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

$$\int_{\Theta} L(\theta,d)\pi(\theta|x)d\theta = \int_{\Theta_0} L(\theta,d)\pi(\theta|x)d\theta + \int_{\Theta_1} L(\theta,d)\pi(\theta|x)d\theta$$

$\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$

Για $d(\mathbf{x}) = \overset{\alpha}{\overset{=}{0}}$

$$\int_{\Theta} L(\theta, d)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta = \int_{\Theta_1} \pi(\theta|\mathbf{x})d\theta$$

Accept H_0

Για $d(\mathbf{x}) = \overset{\alpha}{\overset{=}{1}}$

$$\int_{\Theta} L(\theta, d)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta = \int_{\Theta_0} \pi(\theta|\mathbf{x})d\theta$$

Accept H_1

$$d(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \int_{\Theta_0} \pi(\theta|\mathbf{x})d\theta > 0.5 \\ 1, & \text{αν } \int_{\Theta_0} \pi(\theta|\mathbf{x})d\theta < 0.5 \end{cases}$$

Έλεγχος υποθέσεων

$\Theta_0 = [0.6, 1]$ $\Theta_1 = [0, 0.6)$

Παράδειγμα : $\theta \in [0,1]$ α β

$X \sim \mathrm{Bin}(4, \theta)$, $\theta \sim \mathrm{Beta}(10, 12)$, $H_0 : \theta \geq 0.6$, $H_1 : \theta < 0.6$, **μοναδική παρατήρηση** $: x = 3$

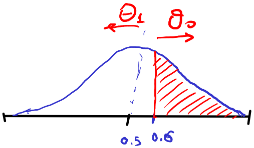
N

4 φορές $x=3$ φορές

$\pi(\theta) \xrightarrow{x=3} \pi(\theta \mid x=3)$

$\theta \mid x \sim \mathrm{Beta}(\alpha + x, \beta + N - x)$

$\sim \mathrm{Beta}(13, 13)$



Accept H_1.

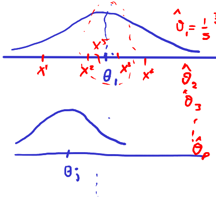
Έστω $X_j \sim \mathcal{N}(\theta_j, 1),\ j = 1, \ldots, p$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

- Ορίζουμε τη διανυσματική τυχαία μεταβλητή $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^T$.
- Θεωρούμε το διάνυσμα των παραμέτρων $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)^T$.
- Επίσης έστω ότι έχουμε μια πραγματοποίηση της $\mathbf{X}$ την $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)^T$.

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το διάνυσμα των παραμέτρων θ κάνοντας χρήση της x.

- Έχουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{p} f_{X_j}(x_j; \theta_j)$$



$\hat\theta_1 = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} x^j$

$\hat{\underset{\sim}{\theta}} = \begin{pmatrix} \hat\theta_1 \\ \hat\theta_2 \\ \vdots \\ \hat\theta_p \end{pmatrix}$

$X_j \sim N(\theta_j, 1)$ $f_{X_j}(x_j;\theta_j) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x_j-\theta_j)^2}{2}\right\}$ $j = 1, \ldots, p$

$$f(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^{p}(x_j-\theta_j)^2}{2}\right\} = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \exp\left\{-\frac{\|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\theta}\|_2^2}{2}\right\}.$$

$\|\underset{\sim}{x}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{p} x_j^2$

Εκτιμήτριες James-Stein για το διάνυσμα των μέσων τιμών

$d_\alpha(x) \in \mathbb{R}^p$

$$d_\alpha(\mathbf{X}) = \left(1 - \frac{\alpha}{\|\mathbf{X}\|_2^2}\right)\mathbf{X}, \quad \alpha \geq 0$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε την τιμή του α για το οποίο η συνάρτηση κινδύνου ως προς το τετραγωνικό σφάλμα ελαχιστοποιείται.

- **Για $\alpha = 0$ λαμβάνουμε μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ.**

$x^T y = y^T x$

$\|x\|_2^2 = x^T x$

$$L(\theta, d_\alpha(x)) = \|\theta - d_\alpha(x)\|_2^2 = \left(\theta - x + \frac{\alpha}{\|x\|_2^2}x\right)^T\left(\theta - x + \frac{\alpha}{\|x\|_2^2}x\right) = (\theta - x)^T(\theta - x) + (\theta - x)^T\frac{\alpha}{\|x\|^2}x + \frac{\alpha}{\|x\|^2}x^T(\theta - x) + \frac{\alpha^2}{\|x\|^4}\|x\|^2 =$$

$$= \|\theta - x\|^2 + 2\alpha\frac{x^T(\theta - x)}{\|x\|^2} + \frac{\alpha^2}{\|x\|^2}$$

$$R(\theta, d_\alpha) = \mathbb{E}\{L(\theta, d_\alpha(x))\} = \underbrace{\mathbb{E}(\|\theta - x\|^2)}_{①} - 2\alpha\underbrace{\mathbb{E}\left\{\frac{x^T(x - \theta)}{\|x\|^2}\right\}}_{②} + \alpha^2\,\mathbb{E}\left\{\frac{1}{\|x\|^2}\right\}$$

$$① \rightsquigarrow = \sum_{j=1}^{p}\mathbb{E}((\theta_j - x_j)^2) = \sum_{j=1}^{p}\mathrm{Var}(x_j) = p.$$

Stein's Paradox

Για $p \geq 3$ η d_0 δεν είναι παραδεκτή συνάρτηση αποφάσεων στη συλλογή των εκτιμητριών James-Stein !!

$$(*) \leftrightarrow \mathbb{E}\left(\frac{X^T(X-\theta)}{\|X\|^2}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{X_j(X_j-\theta_j)}{\|X\|_2^2}\right) = \sum_j \underbrace{\mathbb{E}\left\{\frac{X_j(X_j-\theta_j)}{\|X\|^2}\right\}}$$

$x \cdot y = x^T y = \sum x_j y_j$

$$\mathbb{E}\left\{\frac{X_j(X_j-\theta_j)}{\|X\|^2}\right\} = \int_{\mathbb{R}^p}\frac{x_j}{\|x\|^2}\frac{(x_j-\theta_j)}{(2\pi)^{p/2}}e^{-\frac{\sum(x_i-\theta_i)^2}{2}}\, dx_j \overbrace{dx_1\cdots dx_{j-1}\, dx_{j+1}\cdots dx_p}^{dx} = \int_{\mathbb{R}^p}\frac{x_j}{\|x\|^2}\frac{1}{(2\pi)^{p/2}}\left[e^{-\frac{\sum(x_i-\theta_i)^2}{2}}\right]' dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^p}\frac{\|x\|^2-2x_j^2}{\|x\|^4}\frac{1}{(2\pi)^{p/2}}e^{-\frac{\sum(x_i-\theta_i)^2}{2}}\, dx = \mathbb{E}\left\{\frac{\|X\|^2-2X_j^2}{\|X\|^4}\right\} = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{\|X\|^2}\right\} - 2\,\mathbb{E}\left\{\frac{X_j^2}{\|X\|^4}\right\}$$

$$(*) = \sum_{j=1}^{p}\mathbb{E}\left\{\frac{1}{\|X\|^2}\right\} - 2\sum_{j=1}^{p}\mathbb{E}\left\{\frac{X_j^2}{\|X\|^2}\cdot\frac{1}{\|X\|^2}\right\} = p\,\mathbb{E}\left\{\frac{1}{\|X\|^2}\right\} - 2\,\mathbb{E}\left\{\frac{1}{\|X\|^2}\right\} = (p-2)\,\mathbb{E}\left\{\frac{1}{\|X\|^2}\right\}$$

Το παράδοξο του Stein

$$R(\theta,d_\alpha) = p - 2\alpha(p-2)\mathbb{E}\left\{\frac{1}{\|X\|^2}\right\} + \alpha^2\,\mathbb{E}\left\{\frac{1}{\|X\|^2}\right\} = p - \underbrace{[2\alpha(p-2)-\alpha^2]}_{>0\ ?}\underbrace{\mathbb{E}\left\{\frac{1}{\|X\|^2}\right\}}_{>0}$$

$\underline{d_0} \to R(\theta,d_0) = p$

$g(\alpha) = 2\alpha(p-2) - \alpha^2$ $\quad 0 < \alpha < 2(p-2)$ όταν $p \geq 3$

Έστω $\alpha \in (0, 2(p-2))$ τότε $R(\theta,d_\alpha) < p = R(\theta,d_0)$

άρα η d_0 δεν είναι παραδεκτή

$g'(\alpha) = 2(p-2) - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = p-2$

$g''(\alpha) = -2 < 0$ Άρα $d_{p-2}(x)$ δίνει την ελάχιστη τιμή του $R(\theta,d_\alpha)$

<u>Παράδειγμα</u>:

$p=3$

$X_1 \sim N(1,1)$ $\quad x_1 = 1.1$

$X_2 \sim N(2,1)$ $\quad x_2 = 2.1$

$X_3 \sim N(3,1)$ $\quad x_3 = 2.9$

$$d_{p-2}(\underset{\sim}{x}) = \left(1 - \frac{p-2}{\|\underset{\sim}{x}\|_2^2}\right)\underset{\sim}{x}$$

$$d_1(x) = \left(1 - \frac{1}{\|x\|^2}\right)\begin{bmatrix}1.1\\2.1\\2.9\end{bmatrix}.$$

Το παράδοξο του Stein