MEM-262 Παραμετρική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτη

Διδάσκων : Κώστας Σμαραγδάκης

Διάλεξη 10 : 03-11-2020

$f(x;\theta)$

$\pi(\theta) \xrightarrow{x} \pi(\theta | x)$

Συζυγείς κατανομές

- Στα παραδείγματα της προηγούμενης διάλεξης, υιοθετώντας μια κατάλληλη εκ των προτέρων κατανομή καταλήξαμε σε μια εκ των υστέρον κατανομή της ίδιας οικογένειας αλλά με προσαρμοσμένες παραμέτρους.
- Όταν συμβαίνει αυτό, η κοινή παραμετρική μορφή ονομάμεται **συζυγή εκ των προτέρων κατανομή** του προβλήματος.
- Με τη χρήση συζυγών εκ των προτέρων κατανομων αποφεύγουμε τον υπολογιστικό προσδιορισμό της σταθεράς (ως προς θ) κανονικοποίησης.

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Theta} \pi(\theta')\underbrace{f(\mathbf{x};\theta')}_{L(\theta';x)}d\theta$$

$n=2$

$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_n$

Παραδείγματα

$\theta \leftarrow$ πιθανότητα για Κ.

$1 \leftrightarrow K$

$0 \leftrightarrow \Gamma$

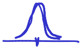
① $N_1 = 5$, $3K$, $x_1 = 3$

② $N_2 = 3$, $1K$, $x_2 = 1$

$\theta \sim \text{Beta}(12,12)$

$\theta | X \sim \text{Beta}(12+4,\ 12+8-4)$

$= \text{Beta}(16, 16)$



- Χαρακτηριστικά παραδείγματα συζυγών εκ των προτέρων κατανομών

Πιθανοφάνεια	εκ των προτέρων	εκ των υστέρων
$\mathrm{Be}(\theta)$	$\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$	$\mathrm{Beta}(\alpha + n\bar{x}_n, \beta + n(1-\bar{x}_n))$
$\rightarrow \mathrm{Bin}(N_j, \theta)$	$\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$	$\mathrm{Beta}(\alpha + \overset{x_1+x_2}{n\bar{x}_n}, \beta + \sum_{j=1}^{n} \overset{5+3}{N_j} - \underset{x_1+x_2}{n\bar{x}_n})$
$\mathrm{Po}(\theta)$	$\mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$	$\mathrm{Gamma}(\alpha + n\bar{x}_n, \beta + n)$
$\mathrm{Ge}(\theta)$	$\mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$	$\mathrm{Gamma}(\alpha + n, \beta + n\bar{x}_n)$
$\mathrm{Exp}(\theta)$	$\mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$	$\mathrm{Gamma}(\alpha + n, \beta + n\bar{x}_n)$
$\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$	$\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$	$\mathcal{N}\left((\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2})^{-1}(\frac{\mu_0}{\sigma^2} + \frac{n\bar{x}_n}{\sigma^2}), (\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2})^{-1} \right)$

$L(\theta, d)$ $\theta \in \Theta$ $\pi(\theta)$ $R(\theta, d) = \mathbb{E}_\theta \{ L(\theta, d(x)) \}$

$= \int_{\mathcal{X}} L(\theta, d(x)) f(x;\theta) dx$

$$
\begin{aligned}
r(\pi, d) &= \int_\Theta R(\theta, d)\pi(\theta)d\theta \\
&= \int_\Theta \int_{\mathcal{X}} L(\theta, d(\mathbf{x}))\overbrace{f(\mathbf{x};\theta)\pi(\theta)}d\mathbf{x}d\theta \\
&= \int_\Theta \int_{\mathcal{X}} L(\theta, d(\mathbf{x}))\overbrace{f(\mathbf{x})\pi(\theta|\mathbf{x})}d\mathbf{x}d\theta \\
&= \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \int_\Theta L(\theta, d(\mathbf{x}))\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

$\pi(\theta|x) = \dfrac{f(x;\theta)\pi(\theta)}{\underbrace{\int_\Theta f(x;\theta')\pi(\theta')d\theta'}_{f(x)}}$

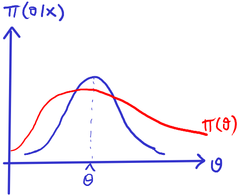
Επειδή $f(\mathbf{x}) \geq 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ για την ελαχιστοποίηση του $r(\pi, d)$ ως προς d αρκεί η ελαχιστοποίηση του παρακάτω ολοκληρώματος για κάθε $\mathbf{x}$.

$$\int_\Theta L(\theta, d(\mathbf{x}))\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta$$

Σημειακή εκτίμηση : Τετραγωνικό σφάλμα

- Τετραγωνικό σφάλμα : $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$
- Παρατηρήσεις : $\mathbf{X} = \mathbf{x}$

Ελαχιστοποίηση ως προς d του παρακάτω ολοκληρώματος



$$\int_\Theta (\theta - d)^2 \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta$$

$$d = \int_\Theta \theta \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta$$

$$\partial_d \int_\theta (\theta - d)^2 \pi(\theta|x)\, d\theta = 0$$

$$2 \int_\Theta (\theta - d)\, \pi(\theta|x)\, d\theta = 0$$

$$d \underbrace{\int_\Theta \pi(\theta|x)\, d\theta}_{1} = \int_\Theta \theta\, \pi(\theta|x)\, d\theta$$

- Η εκτιμήτρια είναι η μέση τιμή της θ χρησιμοποιώντας την εκ των υστέρων κατανομή.

- Απόλυτο σφάλμα : $L(\theta, d) = |\theta - d|$
- Παρατηρήσεις : $\mathbf{X} = \mathbf{x}$

Ελαχιστοποίηση ως προς d του παρακάτω ολοκληρώματος

$$\int_{\Theta} |\theta - d| \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta$$

$d > \theta$ $\int_{-\infty}^{d} (d-\theta)\pi(\theta|x)d\theta$

$+$

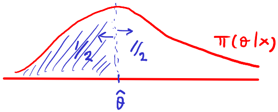
$d < \theta$ $\int_{d}^{+\infty} (\theta-d)\pi(\theta|x)d\theta$

$$\frac{\partial}{\partial d}\int_{-\infty}^{d} g(d,\theta)d\theta = \cancel{g(d,d)}^{0}\frac{\partial d}{\partial d} + \int_{-\infty}^{d}\frac{\partial}{\partial d} g(d,\theta)d\theta$$

$$\partial_d \int_{-\infty}^{d} \overbrace{(d-\theta)\pi(\theta|x)}^{g(d,\theta)} d\theta = \int_{-\infty}^{d} \pi(\theta|x)d\theta$$

$$\partial_d \int_{d}^{+\infty} (\theta-d)\pi(\theta|x)d\theta = -\cancel{g(d,d)}^{0}\cdot 1 - \int_{d}^{+\infty}\pi(\theta|x)d\theta$$

$$\int_{-\infty}^{d} \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta = \int_{d}^{\infty} \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta = 0.5$$



- Η εκτιμήτρια είναι η διάμεσος της θ χρησιμοποιώντας την εκ των υστέρον κατανομή.

Παράδειγμα : $X \sim \text{Bin}(\overset{N}{10}, \theta)$, $\theta \sim \text{Beta}(\overset{\alpha}{12}, \overset{\beta}{12})$, **μοναδική παρατήρηση** : $x = 7$

$n=1$ 10 φορες $\qquad x=7 \qquad \alpha' = \alpha + 7 = 19 \qquad b' = b + 10 - 7 = 15$

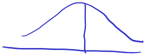
$$\mathbb{E}(\theta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{12}{24} = 0.5$$

$$\theta / x=7 \sim \text{Beta}(19, 15)$$

Εαν $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$

Τοτε $\hat{\theta} = \mathbb{E}(\theta / x=7) = \dfrac{\alpha'}{\alpha'+\beta'} = \dfrac{19}{19+15} = \dfrac{19}{34} \simeq 0.5588$

Εαν $L(\theta, d) = |\theta - d|$



$$\hat{\theta} \approx \frac{\alpha' - 1/3}{\alpha+\beta - 2/3} = \frac{19 - 1/3}{34 - 2/3} = 0.56$$

Έλεγχος υποθέσεων

$$H_0 : \theta \in \Theta_0, \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Omega - \Theta_0$$

$$\mathcal{A} = \{0, 1\}$$

$$L(\theta, 0) = \begin{cases} 0, & \text{εάν } \theta \in \Theta_0 \\ 1, & \text{εάν } \theta \in \Theta_1 \end{cases}, \qquad L(\theta, 1) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } \theta \in \Theta_0 \\ 0, & \text{εάν } \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

Για $d(\mathbf{x}) = 0$

$$\int_{\Theta} L(\theta, d)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta = \int_{\Theta_1} \pi(\theta|\mathbf{x})d\theta$$

Για $d(\mathbf{x}) = 1$

$$\int_{\Theta} L(\theta, d)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta = \int_{\Theta_0} \pi(\theta|\mathbf{x})d\theta$$

$$d(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \int_{\Theta_0} \pi(\theta|\mathbf{x})d\theta > 0.5 \\ 1, & \text{αν } \int_{\Theta_0} \pi(\theta|\mathbf{x})d\theta < 0.5 \end{cases}$$

Παράδειγμα :

$X \sim \mathrm{Bin}(4, \theta)$, $\theta \sim \mathrm{Beta}(12, 12)$, $H_0 : \theta \geq 0.6$, $H_1 : \theta < 0.6$, **μοναδική παρατήρηση** : $x = 3$