MEM-262 Παραμετρική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Διδάσκων : Κώστας Σμαραγδάκης

Ασκήσεις 4 : 20-11-2020

Άσκηση

Βρείτε την μορφή της συνάρτησης αποφάσεως Bayes ενός προβληματος εκτίμησης παραμέτρου, για την συνάρτηση απώλειας:

$$L(\theta, d) = \begin{cases} a(\theta - d), & d \leq \theta \\ b(d - \theta), & d > \theta \end{cases} \qquad a, b > 0$$

(για $a = b = 1$ $\quad L(\theta,d) = |d-\theta|$)

Ελαχιστοποίηση $\underset{\text{Prior}}{r(\pi, d)}$ $\Longleftrightarrow$ Ελαχιστοποίηση $\int_\theta L(\theta, d(x))\pi(\theta|x)\,d\theta = q(d)$

$$q(d) = a\int_d^\infty (\theta - d)\pi(\theta|x)\,d\theta + b\int_{-\infty}^d (d-\theta)\pi(\theta|x)\,d\theta.$$

Θέλουμε να βρούμε την παράγωγο του q ως προς d

$$\partial_d \int_d^\infty (\theta - d)\,\pi(\theta|x)\,d\theta = -\int_d^\infty \pi(\theta|x)\,d\theta$$

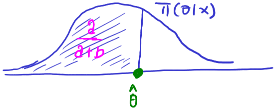
$$\partial_d \int_{-\infty}^d (d-\theta)\,\pi(\theta|x)\,d\theta = \int_{-\infty}^d \pi(\theta|x)\,d\theta$$

$$q'(d) = 0 \Leftrightarrow a\int_d^\infty \pi(\theta|x)\,dx = b\int_{-\infty}^d \pi(\theta|x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_d^\infty \pi(\theta|x)\,dx = \frac{b}{a}\int_{-\infty}^d \pi(\theta|x)\,dx$$

$$1 = \int_d^\infty \pi(\theta|x)\,dx + \int_{-\infty}^d \pi(\theta|x)\,dx \qquad + \int_{-\infty}^d \pi(\theta|x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{d} \pi(\theta|x)\,d\theta = \frac{1}{1+\frac{b}{a}} = \frac{a}{a+b}$$

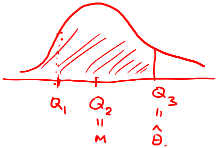


Παράδειγμα

Έστω $a=3$, $b=1$

Εάν υποεκτιμήσω το θ είναι 3 φορές χειρότερο από το να το υπερεκτιμήσω

$$\int_{-\infty}^{d} \pi(\theta|x)\,d\theta = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$



$\theta \in (0,1)$

Έστω $X \sim \mathrm{Bin}(n, \theta)$. Υπολογίστε την συνάρτηση αποφάσεως Bayes βασιζόμενοι σε μια μοναδική παρατήρηση της X και θεωρώντας ομοιόμορφη εκ των προτέρων κατανομή στο $[0, 1]$. Είναι minimax; Για $L(\theta, d) = \frac{(\theta-d)^2}{\theta(1-\theta)}$.

θα ελαχιστοποιήσουμε $\int_\Theta L(\theta,d)\,\pi(\theta|x)\,d\theta \propto \int_0^1 \frac{(\theta-d)^2}{\theta(1-\theta)}\,\theta^x(1-\theta)^{n-x}\,d\theta = \overbrace{\int_0^1 (\theta-d)^2\,\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x-1}\,d\theta}^{q(d)}$

$p(x;\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$

$\pi(\theta|x) \propto p(x;\theta)\cdot\cancel{\pi(\theta)}^{1} = \theta^x(1-\theta)^{n-x}$

$q'(d) = -2\int_0^1 (\theta-d)\,\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x-1}\,d\theta = 0 \iff \int_0^1 \theta\,\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x-1}\,d\theta = d\int_0^1 \theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x-1}\,d\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x) = \frac{\int_0^1 \theta\,\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x-1}\,d\theta}{\int_0^1 \theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x-1}\,d\theta} = \frac{\int_0^1 \theta\,\frac{1}{B(x,n-x)}\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x-1}\,d\theta}{\int_0^1 \frac{1}{B(x,n-x)}\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x-1}\,d\theta} = E_{(x,n-x)}\{\theta\} = \frac{x}{x+n-x} = \frac{x}{n}$

Beta(α, b)

$f(x;\alpha,b) = \frac{1}{B(\alpha,b)}x^{\alpha-1}(1-x)^{b-1}$

$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+b}$

Άρα $d(X) = \frac{X}{n}$ (Bayes)

$$R(\theta, d) = \mathbb{E}_\theta \left\{ \frac{\left(\theta - \frac{X}{n}\right)^2}{\theta(1-\theta)} \right\} = \frac{1}{\theta(1-\theta)} \frac{1}{n^2} \cdot \mathbb{E}_\theta \left\{ (X - n\theta)^2 \right\} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\theta(1-\theta)} Var(X) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{1}{\theta(1-\theta)} n\theta(1-\theta) =$$

$$= \frac{1}{n} \text{ σταθερά ως προς το } \theta.$$

για $Bin(n, \theta)$

$\mathbb{E}(X) = n\theta$

$Var(X) = n\theta(1-\theta)$

* Αν d Bayes για την οποία $R(\theta, d) = c$ $\forall\theta$ τότε d είναι minimax.

Proof

Έστω ότι d δεν είναι minimax τότε $\exists d'$ τ.ω. $\sup_\theta R(\theta, d') < r(\pi, d) = c$

άρα $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $R(\theta, d') < c - \varepsilon$ $\forall\theta$

$$\int_\Theta \pi(\theta) R(\theta, d')\, d\theta \leq \int_\Theta \pi(\theta)(c - \varepsilon)\, d\theta$$

$$r(\pi, d') \leq c - \varepsilon < r(\pi, d)$$

Άρα η d δεν μπορεί να είναι Bayes. Άτοπο!

Άρα η $d(X) = \frac{X}{n}$ είναι minimax.

Άσκηση

Σε ένα κρίσιμο στάδιο ανάπτυξης ενός νέου αεροπλάνου, πρέπει να ληφθεί απόφαση για να συνεχιστεί ή να εγκαταλειφθεί η ανάπτυξη. Η οικονομική βιωσιμότητα του έργου καθορίζεται από την παράμετρο θ, $0 < \theta < 1$. Το έργο είναι κερδοφόρο εάν $\theta > 1/2$. Ένα δεδομένο x παρέχει πληροφορίες για θ.

Εάν $\theta < 1/2$, το κόστος (θα καλυφθεί από τους φορολογούμενους) για τη συνέχιση του έργου είναι $(1/2 - \theta)$ (σε μονάδες δισεκατομμύρια δολάρια), ενώ εάν $\theta > 1/2$ θα είναι μηδέν (το έργο θα ιδιωτικοποιηθεί εάν είναι κερδοφόρο).

Εάν $\theta > 1/2$ το κόστος εγκατάλειψης του έργου είναι $(\theta - 1/2)$ (λόγω διακανονισμών για την αγορά του αεροπλάνου από τους Γάλλους), ενώ εάν $\theta < 1/2$ είναι μηδέν. Γράψτε τη συνάρτηση απόφασης Bayes ως προς την μέση τιμή του θ δεδομένου του x.

$\pi_{PM}(\theta)$

Ο υπουργός έχει αρχική πεποίθηση που δίνεται από την πυκνότητα πιθανότητας $\overbrace{6\theta(1-\theta)}^{\pi_M(\theta)}$, ενώ ο πρωθυπουργός έχει $4\theta^3$. Το πρωτότυπο αεροπλάνο υποβάλλεται σε (ανεξάρτητες) δοκιμές, κάθε μια έχει πιθανότητα θ επιτυχίας και τα δεδομένα x εκφράζουν τον συνολικό αριθμό δοκιμών για να επιτευχθεί το πρώτο επιτυχές αποτέλεσμα. Για ποιες τιμές του x θα προέκυπτε σοβαρή διαφωνία;

$$A = \{\underset{}{\overset{\text{σταματάει}}{0}}, \underset{\text{συνεχίζει}}{1}\} \qquad d : \mathcal{X} \to A$$

$$L(\theta < 1/2, d) = \begin{cases} (1/2 - \theta) & , \text{αν } d = 1 \\ 0 & \text{αν } d = 0 \end{cases} \qquad L(\theta > 1/2, d) = \begin{cases} 0 & , \text{αν } d = 1 \\ (\theta - 1/2) & , \text{αν } d = 0 \end{cases}$$

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την $\varphi(d) = \int_\Theta L(\theta, d)\, \pi(\theta \mid x)\, d\theta =$

$$= \int_0^{1/2} d\,(1/2 - \theta)\, \pi(\theta \mid x)\, d\theta + \int_{1/2}^1 (1 - d)(\theta - 1/2)\, \pi(\theta \mid x)\, d\theta$$

Εάν $d = 0$ τότε $\varphi(0) = \int_{1/2}^1 (\theta - 1/2)\, \pi(\theta \mid x)\, d\theta$

Εάν $d = 1$ τότε $\varphi(1) = \int_0^{1/2} (1/2 - \theta)\, \pi(\theta \mid x)\, d\theta$

Εγκαταλείπω όταν $\varphi(0) < \varphi(1)$

$$\int_0^{1/2} (1/2 - \theta)\, \pi(\theta \mid x)\, d\theta > \int_{1/2}^1 (\theta - 1/2)\, \pi(\theta \mid x)\, d\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \pi(\theta \mid x)\, d\theta - \int_0^{1/2} \theta\, \pi(\theta \mid x)\, d\theta > \int_{1/2}^1 \theta\, \pi(\theta \mid x)\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \pi(\theta \mid x)\, d\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^1 \theta\,\pi(\theta/x)\,d\theta < \tfrac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 \pi(\theta/x)\,d\theta}_{1} = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}_\pi(\theta/x) < \tfrac{1}{2}$$

$$\pi_M(\theta) = 6\theta(1-\theta)$$

$$\pi_{PM}(\theta) = 4\theta^3$$

$$X \sim \mathcal{G}e(\theta) \qquad p(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}$$

<u>M</u>

$$\pi_M(\theta/x) \propto p(x;\theta)\,\pi_M(\theta) \propto \theta(1-\theta)^{x-1}\theta(1-\theta) = \theta^2(1-\theta)^x = \theta^{3-1}(1-\theta)^{(x+1)-1}$$

$$\theta_M / x \sim Beta(3, x+1)$$

$$\hat\theta_M = \frac{3}{3+x+1} = \frac{3}{4+x} < 1/2$$

$$\Rightarrow x > 2$$

<u>PM</u>

$$\pi_{PM}(\theta/x) \propto p(x;\theta)\,\pi_{PM}(\theta) \propto \theta(1-\theta)^{x-1}\theta^3 = \theta^{5-1}(1-\theta)^{x-1}$$

$$\theta_{PM} / x \sim Beta(5, x)$$

$$\hat\theta_{PM} = \frac{5}{5+x} < 1/2$$

$$\Rightarrow x > 5$$